

## Stemmingen en Temperamenten

Hogeschool Gent : Departement Muziek. Vakgroep Scheppende Muziek

# INLEIDING

## KLASSIEKE EN ALTERNATIEVE TOONSYSTEMEN

Voor de eenduidige aanduiding van noten en tonen hanteren we het MIDI systeem, waarbij de centrale Do op het pianoklavier het nummer 60 krijgt. Bij een eerste benadering van het MIDI-systeem valt het op dat het in de allereerste plaats opgezet is voor westerse muziek, geschreven in gelijkzwevende toonsystemen. *In Amerikaanse vakliteratuur wordt de gelijkzwevende stemming vaak aangeduid met de afkorting EQ (Equal) of ET (Equal Temperament)*. De nootnummer-kodes hebben in elk geval steeds betrekking op de ermee overeenstemmende noten op het normale moderne pianoklavier.

Omdat het voor een goed begrip van hetgeen volgt nogal belangrijk is, toch eerst even een opfrissing met betrekking tot de preciese wiskundige basis van het gelijkzwevend toonsysteem :

### regel 1 :

gegeven  $F_0$  = een bepaalde toonhoogte, dan is  $F_0 * 2$  = het oktaaf daarboven en  $F_0 / 2$  = het oktaaf eronder.

Elke oktavering van een toonhoogte komt dus heel precies overeen met een verdubbeling resp. halvering van haar trillingsgetal. De deelfactoren zijn machten van twee. Toonhoogte kent derhalve geen lineair, maar een kwadratisch verloop.

### regel 2 :

elk oktaaf zal worden verdeeld in 12 precies gelijke intervallen (halve tonen, in het westers jargon) en wel op volgende wiskundige wijze :

interval =  $(2^{1/12})$ . Dit is de twaalfdemachtswortel uit 2. We verdelen een oktaaf (een verdubbeling) in 12 gelijke mootjes.

- $F_0 = F_0 * (2^{0/12}) = F_0$
- $F_1 = F_0 * (2^{1/12}) = F_0 * 1.05946309436$
- $F_2 = F_0 * (2^{2/12})$
- $F_3 = F_0 * (2^{3/12})$
- ...
- ...
- $F_n = F_0 * (2^{n/12})$
- ...
- $F_{12} = F_0 * (2^{12/12}) = F_0 * 2$

Zo verkrijgen we alle toonhoogtes waaruit de kromatische toonladder is opgebouwd.

**Deze verdeling van het oktaaf in twaalf gelijke delen werd het ultieme antwoord van de muziekkultuur op het equivalent van de kwadratuur van de cirkel voor de muziek: met name, de onmogelijkheid van de kwintencirkel. Inderdaad, wanneer we kwinten (het halve drievoud van de basisfrequentie) opstapelen, komen we nooit opnieuw bij dezelfde toon uit. Dit volgt uit de rekenkundige evidentie dat  $(3/2)^{12} = 129,7$  en niet = 128. Voor geen enkele gehele macht van  $3/2$  krijgen we ooit een macht van twee als resultaat. Anders gesteld: de kwintencirkel bestaat niet maar is veeleer een kwintenspiraal, die bij elke omwenteling een nieuwe reeks intervallen genereert zonder ooit naar haar oorsprong terug te keren. Het antwoord van de gelijkzwevende stemming was  $(2^{1/12})^{12} = 2$ . De cirkel sluit nu, maar alle intervalverhoudingen zijn irrationale getallen geworden.**

## OPMERKING:

- De notatie hier is die zoals gebruikt in programmeertalen zoals BASIC en Fortran. Hierbij wordt een  $n$ -de machtswortel uit een getal genoteerd als het tot de  $1/n$ -breuk verheffen van dat getal.

vb. vierkantswortel  $2 = 2^{(1/2)}$ , derdemachtswortel uit  $10 = 10^{(1/3)}$

Het immense voordeel van deze notatie tegenover de traditionele is dat alle bewerkingen nu in gewoon machineschrift kunnen worden weergegeven, zonder gebruik te moeten maken van ingewikkelde grafische tekens en speciale wetenschappelijke tekstverwerkers zoals 'Tex'.

Het zal de aandachtige student wel opvallen dat het getal 2 dat zich hier telkens onder de wortel bevindt, voortkomt uit het feit dat we een verdubbeling van frekwentie ( $\times 2$ ), een oktaaf dus, in gelijke stukjes wilden verdelen. Het is perfect mogelijk een toonsysteem te bedenken dat bvb. vrij is van oktaven, of, dat bvb. slechts om de twee oktaven terug juiste oktaven oplevert ... Denk bvb. eens aan de mogelijkheid een interval van twee oktaven te gaan verdelen in 15 gelijke intervallen! De juiste noodzakelijke toonhoogtes kunnen we dan berekenen als volgt:

- $F_0 = F_0$
- $F_1 = F_0 * (2^{(1/15)})$
- ...
- $F_n = F_0 * (2^{(n/15)})$
- $F_{15} = F_0 * (2^{(15/15)}) = F_0 * 2$

We geven dit voorbeeld alleen om erop te wijzen dat ons gelijkzwevend toonsysteem eigenlijk slechts een van de zeer vele mogelijke gelijkzwevende systemen is. In verdere paragrafen gaan we daar veel dieper op in.

Een gelijkzwevend kwarttoonsysteem kan worden berekend met  $f_0 * (2^{(n/24)})$ , waarbij  $n$  gaat van 0 tot 24, voor alle frekwenties binnen een oktaaf. De bekende Fokker-Huygens stemming, die kwa reinheid de juisteboventoonsstemming (zie verder) erg dicht benaderd, en op grond waarvan toch heel wat instrumenten (o.m. een nederlands pijporgel) zijn gebouwd, gaat uit van een verdeling van het oktaaf in 31 delen. Dat is dus:

$f_0 * (2^{(n/31)})$ , voor  $n=0$  tot 31

De algemene vorm van alle gelijkzwevende systemen is evenwel steeds dezelfde:

**stap 1 (regel 1):** bepaal het interval waarbinnen een toonreeks gelijkzwevend verdeeld dient te worden. (Noteer: het hoeven niet eens oktaven te zijn!). Stel interval =  $x$ .

**stap 2 (regel 2):** bepaal het aantal verdelingen waarover je binnen dat interval wil kunnen beschikken. Stel verdeling = Notes.

$$F_0 = F_0$$

$$F_n = F_0 * (x^{(n/Notes)})$$

De theoretici van de muzikale akoestiek en de harmonie, hebben om het getemperd systeem toch te kunnen afwegen tegenover andere mogelijke etnische en oudere (maar daarom niet verouderde...) systemen, nog een ekstra eenheid ingevoerd, kleiner dan het kleinste interval binnen het 12-tonig gelijkzwevend systeem (de halve toon). Om deze frakties te bepalen hebben zij de toonsafstand van een halve toon in elk interval verdeeld in honderd gelijkzwevende stukjes, die men CENT noemt. Voor hondersten, en dus niet bvb. door duizendsten, heeft men gekozen omdat een honderdste van een halve tooninterval reeds niet meer voor het menselijk oor te onderscheiden valt. Aangezien het in muziek toch steeds om geluiden voor en door menselijke waarnemers gaat, niet zo'n gek uitgangspunt natuurlijk. In Cent uitgedrukt wordt het oktaaf dus verdeeld in 1200 gelijke stukjes.

Wiskundig ziet dat er dan uit als volgt :

$$F(n) = F_0 * (2^{(n/1200)})$$

- vb. stel LA=440 Hz en Sib=466 Hz, dan is in dit interval 100 Cents =  $466-440 = 26$  Hz

Dat het aantal trillingen dat met 100 Cents overeenkomt verschilt naargelang het beschouwde interval zal wel duidelijk zijn wanneer we nu een ander interval bezien:

stel LA=1760 Hz en Sib=1864 Hz dan worden 100 cents hier =  $1864 - 1760 = 104$  Hz

Rekening houdend hiermee en met de praktische relevantie van al te kleine sowieso onhoorbare frakties, mogen we de Cents-verdeling echter gerust lineair interpoleren. Wanneer we het MIDI-kodesysteem willen uitbreiden zodat het bruikbaar wordt voor het werken met andere stemmingen (steeds uitgaande van de 12-toons gelijkzwevende stemming als referentiepunt) dan volstaat het de afwijking in cents van een gegeven toon te noteren als het deel achter de komma bij de overeenstemmende toon. 60.5 wordt dan een met een kwarttoon verhoogde centrale Do.

Door de introductie van deze nieuwe eenheid werd het mogelijk een muzikaal inzicht te krijgen in bvb. de relatie van de (niet-getemperde, maar daarom nog niet noodzakelijk écht korrekte) boventoonreeks van snaren en blaasinstrumenten tot de noten van het gelijkzwevend systeem. Lees er maar onze hoofdstukken over akoestiek van muziekinstrumenten (snaren, pijpen, staven en membranen) op na.

#### Voorbeeld:

een akoestisch perfecte reine kwint is hierdoor gekenmerkt dat de trillingsgetallen der beide toonhoogtes zich verhouden als 3 tot 2.

Een rekenkundig perfecte kwint op DO = 523 Hz levert dan ook op

$$\text{SOL} = 523 \cdot \frac{3}{2} = 784.5 \text{ Hz}$$

Een gelijkzwevende kwint op Do = 523 Hz echter is :

$$F(7) = 523 \cdot (2^{(7/12)}) = 783.6 \text{ Hz}$$

De gelijkzwevende kwint is dus een beetje te laag in vergelijking met de 'natuurlijke', of beter gezegd 'rekenkundige' kwint. Laten we beide toonhoogten gelijktijdig horen, dan horen we zwevingen met een frekwentie van  $784.5 - 783.6 = 0.9$  Hz, of iets minder dan 1 zweving per seconde. Merk op dat we dit bij het stemmen van een piano bvb., waarnemen als ongeveer 2 (ritmische) zwevingen per seconde, wat echter veroorzaakt wordt door de zwevingen van de boventonen:

- de tweede harmonische (of oktaaf) van de getemperde Sol = 1567.2 Hz (=  $2 \times 783.6$  Hz) 784.5 Hz is het oktaaf, dus: 1569 Hz.
- de derde harmonische (de kwint boven het oktaaf) van Do = 1569.0 Hz

wanneer die samen klinken horen we 1.8 zwevingen per seconde.

Een berekening in Cents (hier met lineaire interpolatie):

$$\text{De getemperde Fa\#} = F(6) = 523 \cdot (2^{(6/12)}) = 740 \text{ Hz}$$

$$\text{Sol} = 783.6 \text{ Hz}$$

$$100 \text{ Cents} = 43.6 \text{ Hz en dus } 1 \text{ Cent} = 0.436 \text{ Hz}$$

$$\text{Juiste kwint Sol} = 784.5 \text{ Hz}$$

$$\text{Verskil met getemperde sol} = 783.6 - 784.5 = -0.9 \text{ Hz}$$

$$\text{Verskil in Cents} = 0.9 / 0.436 = -2 \text{ Cents}$$

Het zijn deze eenheden die steeds weer worden gebruikt bij onderlinge vergelijkingen van diverse toonsystemen en die men dan ook in de technische literatuur terzake kan weervinden. Niet getemperde systemen berusten zowat allemaal op 'juiste' boventoonsreeksen. Wiskundig komt dat erop neer dat alle intervallen kwalitatief verschillend zijn, want afgeleid uit eenvoudige getalverhoudingen ten opzichte van een willekeurig gekozen grondtoon.

Welhaast klassieke, niet getemperde noch gelijkzwevende, toonsystemen zijn bvb.:

De juiste boventoons-grote-terstoonladder :

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Fo	Fo * 9/8	Fo * 5/4	Fo * 4/3	Fo * 3/2	Fo * 5/3	Fo * 15/8	Fo * 2

De onderlinge getalverhoudingen der intervallen zijn daarbij dan :

DO - RE	RE -MI	MI - FA	FA - SOL	SOL - LA	LA -SI	SI -DO
$(9:8)/(1:1) = 9:8$	$(5:4)/(9:8) = 10:9$	$(4:3)/(5:4) = 16:15$	$(3:2)/(4:3) = 9:8$	$(5:3)/(3:2) = 10:9$	$(15:8)/(5:3) = 9:8$	$(1:2)/(15:8) = 16:15$

De juiste boventoons-mineur-toonladder :

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Fo	Fo * 9/8	Fo * 6/5	Fo * 4/3	Fo * 3/2	Fo * 8/5	Fo * 9/5	Fo * 2

Intervallen in deze juiste boventoons mineur toonladder:

DO - RE	RE -MI	MI - FA	FA - SOL	SOL - LA	LA -SI	SI -DO
9:8	16:15	10:9	9:8	16:15	9:8	10:9

Vanzelfsprekend zijn ook hier weer onnoemelijk vele alternatieve mogelijkheden voorhanden om onze oktaven te gaan verdelen. De vele muziekkulturen die onze wereld kent (of gekend heeft, want vele ervan werden door het imperialisme van onze muziekkultuur en haar speeltuigen zo goed als uitgeroeid) hebben bijna evenzoveel verschillende toonsystemen voortgebracht. Verder geven we zowat alle realistische mogelijkheden en gaan we ook wat dieper in op een aantal voor de recente muziekgeschiedenis relevante selecties.

## ANALYSE VAN GELIJKZWEVENDE TOONSYSTEMEN

Alle hier uitgevoerde berekeningen gaan uit van diapason La = 440.0Hz. Noten worden uitgedrukt als fraktionele midi getallen, waarbij noot 60 overeenkomt met de centrale Do (C) op het pianoklavier.

Kwintenspiralen:

Reine kwinten (3:2)

fout in cents: 1

nauwkeurigheid te sluiten)

fout in cents: 2

fout in cents: 4

fout in cents: 24

aantal kwinten= 665 (aantal kwinten nodig om met 1 cent

aantal kwinten= 359

aantal kwinten= 53

aantal kwinten= 12 (de eerste periode van de

kwintenspiraal)

De afwijking bij 12 tonen, benaderd de historische syntonische komma=  $200/9 = 22.2$

De gelijkzwevend verkregen intervallen kunnen we nu vergelijken met de juiste boventoonsintervallen:  
In het 12-tonig gelijkzwevend systeem:

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:	15.64	$2^{(3/12)}$	Interval: 60	63
Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:	-13.69	$2^{(4/12)}$	Interval: 60	64
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	-1.95	$2^{(5/12)}$	Interval: 60	65
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	1.96	$2^{(7/12)}$	Interval: 60	67

In het 53 tonig gelijkzwevend systeem daarentegen:

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:	-1.34	$2^{(14/53)}$	Interval: 60	63.16981
Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:	1.41	$2^{(17/53)}$	Interval: 60	63.84906
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	-.07	$2^{(22/53)}$	Interval: 60	64.98113
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	.07	$2^{(31/53)}$	Interval: 60	67.01887

Dat een 53 toons systeem merkkelijk juistere intervallen oplevert, hoeft geen betoog. De kwinten zijn perfect en de tertsen volstrekt harmonisch. Een gelijkzwevend toonsysteem met 54 tonen per oktaaf zou evenwel leiden tot volstrekt niet hanteerbare, laat staan praktisch stembare, akoestische muziekinstrumenten. Elektronisch vormt het dan weer geen enkel probleem. De weinige composities die dan ook in een 53 toons gelijkzwevende stemming zijn geschreven en gerealiseerd, behoren allemaal tot de elektronische muziek.

Ongebruikelijk in onze klassieke muziek, maar rekenkundig perfect mogelijk, kunnen we ook uitgaan van kwartencirkels, met als resultaat:

Reine kwarten (4:3) spiralen

fout in cents: 1	aantal kwarten= 7621
fout in cents: 2	aantal kwarten= 306
fout in cents: 6	aantal kwarten= 253
fout in cents: 9	aantal kwarten= 200
fout in cents: 13	aantal kwarten= 147
fout in cents: 17	aantal kwarten= 94
fout in cents: 20	aantal kwarten= 41
fout in cents: 44	aantal kwarten= 29
fout in cents: 67	aantal kwarten= 17

Dit zouden leiden tot een oktaafverdeling in 17, 29 of 41 delen, maar zoals blijkt uit de berekening levert dit geenszins een beter resultaat op dan een kwintenstemming. We hebben 41 intervallen per oktaaf nodig om de kwartenspiraal als cirkel te doen sluiten met een afwijking iets kleiner dan de komma.

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:	-6.31	$2^{(11/41)}$	Interval: 60	63.21952
Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:	5.83	$2^{(13/41)}$	Interval: 60	63.80488
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	.48	$2^{(17/41)}$	Interval: 60	64.97561
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	-.48	$2^{(24/41)}$	Interval: 60	67.02439

De verdeling van het oktaaf in zeventien intervallen, uitgaand van kwarten levert:

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:	33.29	$2^{(4/17)}$	Interval: 60	62.82353
Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:	33.37	$2^{(5/17)}$	Interval: 60	63.52942
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	3.93	$2^{(7/17)}$	Interval: 60	64.94118
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	-3.93	$2^{(10/17)}$	Interval: 60	67.05883

Hier stellen we vast dat ondanks een grotere verdeling van het oktaaf, er helemaal geen voordeel kan gehaald worden uit een dergelijke stemming. De kwinten zijn slechter en ook de tertsen wijken sterker af

dan in de gewone 12-tonige gelijkzwevende stemming.

Opdat de intervallencirkel zich binnen een redelijk aantal cycli zou sluiten, is het vereist dat het cirkelinterval geen deler is of gemeenschappelijk heeft met 12, teminste voorzover we een toonsysteem willen waarin konventionele muziek nog steeds redelijk speelbaar blijft... Op grond hiervan zouden we dan ook een systeem kunnen baseren op de juiste grote septiem.

Grote septiemen (15:8) spiralen

fout in cents: 1	aantal 15:8 septiemen=	537
fout in cents: 3	aantal 15:8 septiemen=	247
fout in cents: 7	aantal 15:8 septiemen=	204
fout in cents: 12	aantal 15:8 septiemen=	161
fout in cents: 16	aantal 15:8 septiemen=	118
fout in cents: 21	aantal 15:8 septiemen=	75
fout in cents: 25	aantal 15:8 septiemen=	32
fout in cents: 54	aantal 15:8 septiemen=	21

Juistheid van de 6:5 kleine tertsen in cent:	-27.22	$2^{(6/21)}$	Interval: 60	63.42857
Juistheid van de 5:4 grote tertsen in cent:	-13.69	$2^{(7/21)}$	Interval: 60	64
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	-16.24	$2^{(9/21)}$	Interval: 60	65.14285
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	16.24	$2^{(12/21)}$	Interval: 60	66.85714

Waarom dit nooit aanleiding gaf tot praktische muziek, zal wel duidelijk zijn...

Evenmin gebruikelijk, maar bepleitbaar, zou zijn een stemming te steunen op zo juist mogelijke grote (5:4) of kleine (6:5) tertsen:

Grote juiste tertsen (5:4) spiralen

fout in cents: 1	aantal 5:4 tertsen=	2075
fout in cents: 2	aantal 5:4 tertsen=	146
fout in cents: 10	aantal 5:4 tertsen=	87
fout in cents: 17	aantal 5:4 tertsen=	28
fout in cents: 58	aantal 5:4 tertsen=	25
fout in cents: 99	aantal 5:4 tertsen=	22

Juistheid van de 6:5 kleine tertsen in cent:	-11.63	$2^{(6/22)}$	Interval: 60	63.27273
Juistheid van de 5:4 grote tertsen in cent:	4.5	$2^{(7/22)}$	Interval: 60	63.81818
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	7.14	$2^{(9/22)}$	Interval: 60	64.90909
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	-7.14	$2^{(13/22)}$	Interval: 60	67.09091

Uitgaand van een grote tertsen-stemming, krijgen we dus wanneer we een oktaaf verdelen in 22 gelijke delen, een tertsen-spiraal die ons op 1 cent na, naar een een halve toon verschoven toonsysteem brengt. Zo'n systeem zou dus te verzoenen zijn met het kromatisch 12-tonig gelijkzwevend systeem, maar dan met goede tertsen ten nadele van nogal botsende kwinten.

We kunnen op gelijkaardige wijze ook nog berekenen wat kleine tertsen (6:5) ons kunnen bieden, maar met een minimale onderverdeling van het oktaaf in 23 intervallen sluiten we nog steeds af met een fout van 60 cents...

Juistheid van de 6:5 kleine tertsen in cent:	2.6	$2^{(6/23)}$	Interval: 60	63.13044
Juistheid van de 5:4 grote tertsen in cent:	21.1	$2^{(7/23)}$	Interval: 60	63.65218
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	-23.69	$2^{(10/23)}$	Interval: 60	65.21739
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	23.69	$2^{(13/23)}$	Interval: 60	66.78261

De gelijkzwevende 19 toons verdeling van het oktaaf heeft een grote graad van perfectie bereikt voor de harmonische juistheid van de kleine tertsen. De 'onreinheid' van de grote tertsen, de kwarten en de kwinten is hier precies evengroot. Het is een stemming die heel wat verdedigers heeft gehad. (Er bestaat ook een 19-toons niet gelijkzwevende variant).

Juistheid van de 6:5 kleine tertsen in cent:	-15	$2^{(5/19)}$	Interval: 60	63.1579
Juistheid van de 5:4 grote tertsen in cent:	7.37	$2^{(6/19)}$	Interval: 60	63.78947
Juistheid van de 4:3 kwart in cent:	-7.22	$2^{(8/19)}$	Interval: 60	65.05264
Juistheid van de 3:2 kwint in cent:	7.22	$2^{(11/19)}$	Interval: 60	66.94737

Uit bovenstaande berekeningen en overwegingen blijkt de op kwinten gesteunde gelijkzwevende

stemming voor een 12 tonige verdeling van het oktaaf alleszins nog het meest economisch en rationeel te zijn.

Maar, in plaats van uit te gaan van een enkel interval dat we zo dicht mogelijk bij het platonische ideaal laten aanleunen, -meestal is dat de kwint- kunnen we ook pogen een optimalisatie te vinden waarbij zoveel mogelijk van de diatonische intervallen 'juist' klinken. Dit is precies wat Huygens en Fokker voor ogen stond bij de ontwikkeling van de door hen voorgestelde gelijkzwevende stemming met 31-tonen per oktaaf.

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:  $5.96 \cdot 2^{(8/31)}$ . Interval: 60 63.09678  
 Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:  $-.78 \cdot 2^{(10/31)}$ . Interval: 60 63.87097  
 Juistheid van de 4:3 kwart in cent:  $-5.18 \cdot 2^{(13/31)}$ . Interval: 60 65.03226  
 Juistheid van de 3:2 kwint in cent:  $5.18 \cdot 2^{(18/31)}$ . Interval: 60 66.96774

Maar, het is ook mogelijk een heel andere weg in te slaan. In plaats van het oktaaf te verdelen in twaalf gelijkzwevende delen, kunnen we ook de duodeciem (oktaaf + kwint) gelijkzwevend verdelen in 19 halvetoons intervallen. Dit levert ons vanzelfsprekend opnieuw een stemming op met 12 tonen per oktaaf, dus volkomen compatibel met de organisatie van de bestaande westerse muziekinstrumenten met klavieren en fretten. Het voordeel is dat we dan steeds juiste kwinten hebben, maar de oktaven iets aan juistheid inboeten. In de laatste jaren gaan -vooral in Frankrijk- meer en meer stemmen op om onze pianos en orkestinstrumenten op deze wijze te gaan stemmen en intoneren.

We hebben beide systemen naasten berekend en in volgende tabel tegenover elkaar gesteld:

Vergelijking gelijkzwevende verdeling oktaaf in 12 delen, of duodeciem in 19 delen, eveneens gelijkzwevend, met opgave van de exakte frekwenties van de zo verkregen kromatische toonhoogtes.

noot= 24 32.7032	12-root 2 freq= 32.7032	19-root 3 freq=	noot= 72 524.7461	12-root 2 freq= 523.2512	19-root 3 freq=
noot= 25 34.64989	12-root 2 freq= 34.64783	19-root 3 freq=	noot= 73 555.9822	12-root 2 freq= 554.3654	19-root 3 freq=
noot= 26 36.71247	12-root 2 freq= 36.7081	19-root 3 freq=	noot= 74 589.0776	12-root 2 freq= 587.3296	19-root 3 freq=
noot= 27 38.89782	12-root 2 freq= 38.89088	19-root 3 freq=	noot= 75 624.1431	12-root 2 freq= 622.2541	19-root 3 freq=
noot= 28 41.21325	12-root 2 freq= 41.20345	19-root 3 freq=	noot= 76 661.2958	12-root 2 freq= 659.2552	19-root 3 freq=
noot= 29 43.66651	12-root 2 freq= 43.65354	19-root 3 freq=	noot= 77 700.6602	12-root 2 freq= 698.4566	19-root 3 freq=
noot= 30 46.26581	12-root 2 freq= 46.24931	19-root 3 freq=	noot= 78 742.3677	12-root 2 freq= 739.989	19-root 3 freq=
noot= 31 49.01983	12-root 2 freq= 48.99944	19-root 3 freq=	noot= 79 786.558	12-root 2 freq= 783.991	19-root 3 freq=
noot= 32 51.93779	12-root 2 freq= 51.9131	19-root 3 freq=	noot= 80 833.3787	12-root 2 freq= 830.6096	19-root 3 freq=
noot= 33 55.02944	12-root 2 freq= 55.00001	19-root 3 freq=	noot= 81 882.9864	12-root 2 freq= 880.0001	19-root 3 freq=
noot= 34 58.30512	12-root 2 freq= 58.27048	19-root 3 freq=	noot= 82 935.5471	12-root 2 freq= 932.3277	19-root 3 freq=
noot= 35 61.7758	12-root 2 freq= 61.73542	19-root 3 freq=	noot= 83 991.2366	12-root 2 freq= 987.7668	19-root 3 freq=
noot= 36 65.45307	12-root 2 freq= 65.4064	19-root 3 freq=	noot= 84 1050.241	12-root 2 freq= 1046.502	19-root 3 freq=
noot= 37 69.34923	12-root 2 freq= 69.29567	19-root 3 freq=	noot= 85 1112.758	12-root 2 freq= 1108.731	19-root 3 freq=
noot= 38 73.47732	12-root 2 freq= 73.41621	19-root 3 freq=	noot= 86 1178.996	12-root 2 freq= 1174.659	19-root 3 freq=
noot= 39 77.85114	12-root 2 freq= 77.78176	19-root 3 freq=	noot= 87 1249.177	12-root 2 freq= 1244.508	19-root 3 freq=
noot= 40 82.4853	12-root 2 freq= 82.40691	19-root 3 freq=	noot= 88 1323.535	12-root 2 freq= 1318.51	19-root 3 freq=
noot= 41 87.39533	12-root 2 freq= 87.30708	19-root 3 freq=	noot= 89 1402.32	12-root 2 freq= 1396.913	19-root 3 freq=
noot= 42 92.59763	12-root 2 freq= 92.49862	19-root 3 freq=	noot= 90 1485.795	12-root 2 freq= 1479.978	19-root 3 freq=
noot= 43 98.1096	12-root 2 freq= 97.99888	19-root 3 freq=	noot= 91 1574.238	12-root 2 freq= 1567.982	19-root 3 freq=
noot= 44 103.9497	12-root 2 freq= 103.8262	19-root 3 freq=	noot= 92 1667.946	12-root 2 freq= 1661.219	19-root 3 freq=
noot= 45 110.1374	12-root 2 freq= 110	19-root 3 freq=	noot= 93 1767.233	12-root 2 freq= 1760	19-root 3 freq=
noot= 46 116.6934	12-root 2 freq= 116.541	19-root 3 freq=	noot= 94 1872.429	12-root 2 freq= 1864.655	19-root 3 freq=
noot= 47 123.6397	12-root 2 freq= 123.4708	19-root 3 freq=	noot= 95 1983.888	12-root 2 freq= 1975.534	19-root 3 freq=
noot= 48	12-root 2 freq= 130.8128	19-root 3 freq=	noot= 96	12-root 2 freq= 2093.005	19-root 3 freq=

130.9995			2101.981		
noot= 49	12-root 2 freq= 138.5913	19-root 3 freq=	noot= 97	12-root 2 freq= 2217.461	19-root 3 freq=
138.7974			2227.103		
noot= 50	12-root 2 freq= 146.8324	19-root 3 freq=	noot= 98	12-root 2 freq= 2349.319	19-root 3 freq=
147.0595			2359.674		
noot= 51	12-root 2 freq= 155.5635	19-root 3 freq=	noot= 99	12-root 2 freq= 2489.016	19-root 3 freq=
155.8134			2500.136		
noot= 52	12-root 2 freq= 164.8138	19-root 3 freq=	noot= 100	12-root 2 freq= 2637.021	19-root 3 freq=
165.0883			2648.959		
noot= 53	12-root 2 freq= 174.6142	19-root 3 freq=	noot= 101	12-root 2 freq= 2793.826	19-root 3 freq=
174.9154			2806.641		
noot= 54	12-root 2 freq= 184.9972	19-root 3 freq=	noot= 102	12-root 2 freq= 2959.956	19-root 3 freq=
185.3274			2973.71		
noot= 55	12-root 2 freq= 195.9978	19-root 3 freq=	noot= 103	12-root 2 freq= 3135.964	19-root 3 freq=
196.3592			3150.723		
noot= 56	12-root 2 freq= 207.6524	19-root 3 freq=	noot= 104	12-root 2 freq= 3322.438	19-root 3 freq=
208.0477			3338.273		
noot= 57	12-root 2 freq= 220	19-root 3 freq=	noot= 105	12-root 2 freq= 3520	19-root 3 freq=
220.432			3536.987		
noot= 58	12-root 2 freq= 233.0819	19-root 3 freq=	noot= 106	12-root 2 freq= 3729.311	19-root 3 freq=
233.5534			3747.53		
noot= 59	12-root 2 freq= 246.9417	19-root 3 freq=	noot= 107	12-root 2 freq= 3951.067	19-root 3 freq=
247.4559			3970.606		
noot= 60	12-root 2 freq= 261.6256	19-root 3 freq=	noot= 108	12-root 2 freq= 4186.01	19-root 3 freq=
262.186			4206.96		
noot= 61	12-root 2 freq= 277.1827	19-root 3 freq=	noot= 109	12-root 2 freq= 4434.923	19-root 3 freq=
277.7929			4457.384		
noot= 62	12-root 2 freq= 293.6648	19-root 3 freq=	noot= 110	12-root 2 freq= 4698.637	19-root 3 freq=
294.3288			4722.715		
noot= 63	12-root 2 freq= 311.127	19-root 3 freq=	noot= 111	12-root 2 freq= 4978.033	19-root 3 freq=
311.8491			5003.84		
noot= 64	12-root 2 freq= 329.6276	19-root 3 freq=	noot= 112	12-root 2 freq= 5274.042	19-root 3 freq=
330.4122			5301.699		
noot= 65	12-root 2 freq= 349.2283	19-root 3 freq=	noot= 113	12-root 2 freq= 5587.653	19-root 3 freq=
350.0803			5617.288		
noot= 66	12-root 2 freq= 369.9945	19-root 3 freq=	noot= 114	12-root 2 freq= 5919.912	19-root 3 freq=
370.9192			5951.662		
noot= 67	12-root 2 freq= 391.9955	19-root 3 freq=	noot= 115	12-root 2 freq= 6271.928	19-root 3 freq=
392.9986			6305.942		
noot= 68	12-root 2 freq= 415.3048	19-root 3 freq=	noot= 116	12-root 2 freq= 6644.876	19-root 3 freq=
416.3923			6681.31		
noot= 69	12-root 2 freq= 440.0001	19-root 3 freq=	noot= 117	12-root 2 freq= 7040.001	19-root 3 freq=
441.1784			7079.022		
noot= 70	12-root 2 freq= 466.1638	19-root 3 freq=	noot= 118	12-root 2 freq= 7458.622	19-root 3 freq=
467.4401			7500.408		
noot= 71	12-root 2 freq= 493.8834	19-root 3 freq=	noot= 119	12-root 2 freq= 7902.134	19-root 3 freq=
495.2649			7946.878		
			noot= 120	12-root 2 freq= 8372.02	19-root 3 freq=
			8419.924		

Ter beoordeling hierbij een 'graad'meter van de kwaliteit van de duodeciem stemming:

Juistheid van de 6:5 kleine tertsen in cent:  $15.33 \cdot 3^{(3/19)}$ . Interval: 60 63.00309  
 Juistheid van de 5:4 grote tertsen in cent:  $-14.1 \cdot 3^{(4/19)}$ . Interval: 60 64.00412  
 Juistheid van de 4:3 kwart in cent:  $-2.47 \cdot 3^{(5/19)}$ . Interval: 60 65.00515  
 Juistheid van de 3:2 kwint in cent:  $1.24 \cdot 3^{(7/19)}$ . Interval: 60 67.0072  
 Juistheid van de 2:1 oktaaf in cent:  $-1.24 \cdot 3^{(12/19)}$ . Interval: 60 72.01235

In vergelijking met de konventionele stemming met juiste oktaven, levert deze stemming ons inderdaad substantieel betere kwinten op. De oktaven worden nu iets te klein genomen. Verder bij onze behandeling van reële boventonen van snaren zal blijken dat hiervoor zeer sterke wetenschappelijke argumenten te geven zijn. De heilige koe van het juiste oktaaf wordt hier evenwel geofferd...

## KWARTTOONSSYSTEMEN EN STEMMINGEN

Kwarttoons gelijkzwevende stemmingen hebben in de loop van de geschiedenis tot op vandaag vele pleitbezorgers gekend. Charles Ives, Yvan Wiesnegrady en Alois Haba zijn wellicht de bekendste voorbeelden uit de eerste helft van de twintigste eeuw. Er werden en worden ook heel wat instrumenten speciaal voor gebouwd en ontworpen. Wijzelf hebben voor deze stemming een orgel gebouwd met een tessenatuur van zes oktaven, <Qt>, dit in het kader van een postdoctoraal onderzoeksproject van de Hogeschool Gent, departement Muziek en Drama, in samenwerking met Stichting Logos, waar een uitgebreid atelier voor experimentele instrumentenbouw en artistiek-technologische research operationeel is. Daarnaast bouwden we ook een kwarttoons xylofoon (3.5 oktaven), een kwarttoons-tubofoon (3



oktaven) en <puff>, (4 oktaven, eveneens in kwarttonen). De mogelijkheid om kwarttoonsmuziek op pianos te spelen hebben we eveneens, met behulp van de beide pianorobots die we in de laatste decennia tot een vrij grote graad van perfectie wisten te brengen. Redenen te over dus om hier wat nader in te gaan op kwarttoons stemmingen en de specifieke eigenschappen ervan.

Alle hier uitgevoerde berekeningen gaan uit van diapason La = 440.0Hz. Noten worden uitgedrukt als fraktionele midi getallen, waarbij noot 60 overeenkomt met de centrale Do (C) op het pianoklavier.

Quartone scale in music staff notation and fractional midi numbers

60 60.5 61 61.5 62 62.5 63 63.5 64 64.5 65 65.5 66 66.5 67 67.5 68 68.5 69 69.5 70 70.5 71

Kwarttoons gelijkzwevende stemmingen:

Vergelijking verdeling oktaaf in 24 delen, of duodeciem in 38 delen, gelijkzwevend

noot= 24 32.7032	24-root 2 freq= 32.7032	38-root 3 freq=	noot= 72 130.9995	24-root 2 freq= 130.8128	38-root 3 freq=
noot= 24.5 33.17937	24-root 2 freq= 33.17888	38-root 3 freq=	noot= 72.5 132.9069	24-root 2 freq= 132.7155	38-root 3 freq=
noot= 25 33.66248	24-root 2 freq= 33.66148	38-root 3 freq=	noot= 73 134.8421	24-root 2 freq= 134.6459	38-root 3 freq=
noot= 25.5 34.15262	24-root 2 freq= 34.1511	38-root 3 freq=	noot= 73.5 136.8055	24-root 2 freq= 136.6044	38-root 3 freq=
noot= 26 34.64989	24-root 2 freq= 34.64783	38-root 3 freq=	noot= 74 138.7974	24-root 2 freq= 138.5913	38-root 3 freq=
noot= 26.5 35.15441	24-root 2 freq= 35.1518	38-root 3 freq=	noot= 74.5 140.8184	24-root 2 freq= 140.6072	38-root 3 freq=
noot= 27 35.66628	24-root 2 freq= 35.66309	38-root 3 freq=	noot= 75 142.8687	24-root 2 freq= 142.6524	38-root 3 freq=
noot= 27.5 36.18559	24-root 2 freq= 36.18182	38-root 3 freq=	noot= 75.5 144.949	24-root 2 freq= 144.7273	38-root 3 freq=
noot= 28 36.71247	24-root 2 freq= 36.7081	38-root 3 freq=	noot= 76 147.0595	24-root 2 freq= 146.8324	38-root 3 freq=
noot= 28.5 37.24701	24-root 2 freq= 37.24203	38-root 3 freq=	noot= 76.5 149.2007	24-root 2 freq= 148.9681	38-root 3 freq=
noot= 29 37.78934	24-root 2 freq= 37.78373	38-root 3 freq=	noot= 77 151.3732	24-root 2 freq= 151.1349	38-root 3 freq=
noot= 29.5 38.33957	24-root 2 freq= 38.33331	38-root 3 freq=	noot= 77.5 153.5772	24-root 2 freq= 153.3332	38-root 3 freq=
noot= 30 38.89782	24-root 2 freq= 38.89088	38-root 3 freq=	noot= 78 155.8134	24-root 2 freq= 155.5635	38-root 3 freq=
noot= 30.5 39.46418	24-root 2 freq= 39.45656	38-root 3 freq=	noot= 78.5 158.0821	24-root 2 freq= 157.8262	38-root 3 freq=
noot= 31 40.0388	24-root 2 freq= 40.03047	38-root 3 freq=	noot= 79 160.3838	24-root 2 freq= 160.1219	38-root 3 freq=
noot= 31.5 40.62178	24-root 2 freq= 40.61272	38-root 3 freq=	noot= 79.5 162.719	24-root 2 freq= 162.4509	38-root 3 freq=
noot= 32 41.21325	24-root 2 freq= 41.20345	38-root 3 freq=	noot= 80 165.0883	24-root 2 freq= 164.8138	38-root 3 freq=
noot= 32.5 41.81333	24-root 2 freq= 41.80277	38-root 3 freq=	noot= 80.5 167.4921	24-root 2 freq= 167.2111	38-root 3 freq=
noot= 33 42.42215	24-root 2 freq= 42.4108	38-root 3 freq=	noot= 81 169.9308	24-root 2 freq= 169.6432	38-root 3 freq=
noot= 33.5 43.03983	24-root 2 freq= 43.02768	38-root 3 freq=	noot= 81.5 172.4051	24-root 2 freq= 172.1107	38-root 3 freq=
noot= 34 43.66651	24-root 2 freq= 43.65354	38-root 3 freq=	noot= 82 174.9154	24-root 2 freq= 174.6142	38-root 3 freq=
noot= 34.5 44.30231	24-root 2 freq= 44.28849	38-root 3 freq=	noot= 82.5 177.4622	24-root 2 freq= 177.154	38-root 3 freq=
noot= 35 44.94737	24-root 2 freq= 44.93268	38-root 3 freq=	noot= 83 180.0461	24-root 2 freq= 179.7307	38-root 3 freq=
noot= 35.5 45.60182	24-root 2 freq= 45.58624	38-root 3 freq=	noot= 83.5 182.6677	24-root 2 freq= 182.345	38-root 3 freq=
noot= 36 46.26581	24-root 2 freq= 46.24931	38-root 3 freq=	noot= 84 185.3274	24-root 2 freq= 184.9972	38-root 3 freq=
noot= 36.5 46.93946	24-root 2 freq= 46.92202	38-root 3 freq=	noot= 84.5 188.0258	24-root 2 freq= 187.6881	38-root 3 freq=
noot= 37 47.62291	24-root 2 freq= 47.60452	38-root 3 freq=	noot= 85 190.7636	24-root 2 freq= 190.4181	38-root 3 freq=
noot= 37.5 48.31632	24-root 2 freq= 48.29694	38-root 3 freq=	noot= 85.5 193.5412	24-root 2 freq= 193.1878	38-root 3 freq=
noot= 38 49.01983	24-root 2 freq= 48.99944	38-root 3 freq=	noot= 86 196.3592	24-root 2 freq= 195.9978	38-root 3 freq=
noot= 38.5 49.73358	24-root 2 freq= 49.71215	38-root 3 freq=	noot= 86.5 199.2183	24-root 2 freq= 198.8486	38-root 3 freq=
noot= 39 50.45772	24-root 2 freq= 50.43523	38-root 3 freq=	noot= 87 202.119	24-root 2 freq= 201.7409	38-root 3 freq=
noot= 39.5	24-root 2 freq= 51.16883	38-root 3 freq=	noot= 87.5	24-root 2 freq= 204.6753	38-root 3 freq=

51.1924 noot= 40 51.93779 noot= 40.5 52.69402 noot= 41 53.46126 noot= 41.5 54.23968 noot= 42 55.02944 noot= 42.5 55.83069 noot= 43 56.64361 noot= 43.5 57.46836 noot= 44 58.30512 noot= 44.5 59.15407 noot= 45 60.01538 noot= 45.5 60.88922 noot= 46 61.7758 noot= 46.5 62.67528 noot= 47 63.58786 noot= 47.5 64.51372	24-root 2 freq= 51.9131	38-root 3 freq=	205.0619 noot= 88 208.0477 noot= 88.5 211.077 noot= 89 214.1503 noot= 89.5 217.2684 noot= 90 220.432 noot= 90.5 223.6415 noot= 91 226.8978 noot= 91.5 230.2016 noot= 92 233.5534 noot= 92.5 236.954 noot= 93 240.4042 noot= 93.5 243.9046 noot= 94 247.4559 noot= 94.5 251.059 noot= 95 254.7145 noot= 95.5 258.4232	24-root 2 freq= 207.6524	38-root 3 freq=
noot= 48 65.45307 noot= 48.5 66.40609 noot= 49 67.37299 noot= 49.5 68.35397 noot= 50 69.34923 noot= 50.5 70.35898 noot= 51 71.38344 noot= 51.5 72.42281 noot= 52 73.47732 noot= 52.5 74.54718 noot= 53 75.63261 noot= 53.5 76.73386 noot= 54 77.85114 noot= 54.5 78.98468 noot= 55 80.13473 noot= 55.5 81.30152 noot= 56 82.4853 noot= 56.5 83.68632 noot= 57 84.90483 noot= 57.5 86.14108 noot= 58 87.39533 noot= 58.5 88.66785 noot= 59 89.95888 noot= 59.5 91.26872	24-root 2 freq= 65.4064	38-root 3 freq=	noot= 96 262.186 noot= 96.5 266.0035 noot= 97 269.8766 noot= 97.5 273.8062 noot= 98 277.7929 noot= 98.5 281.8377 noot= 99 285.9413 noot= 99.5 290.1048 noot= 100 294.3288 noot= 100.5 298.6143 noot= 101 302.9623 noot= 101.5 307.3736 noot= 102 311.8491 noot= 102.5 316.3897 noot= 103 320.9964 noot= 103.5 325.6703 noot= 104 330.4122 noot= 104.5 335.2231 noot= 105 340.1041 noot= 105.5 345.0562 noot= 106 350.0803 noot= 106.5 355.1776 noot= 107 360.3492 noot= 107.5 365.596	24-root 2 freq= 261.6256	38-root 3 freq=
noot= 60 92.59763 noot= 60.5 93.94589 noot= 61 95.31378 noot= 61.5 96.70159 noot= 62 98.1096	24-root 2 freq= 92.49862	38-root 3 freq=	noot= 108 370.9192 noot= 108.5 376.32 noot= 109 381.7993 noot= 109.5 387.3585 noot= 110 392.9986	24-root 2 freq= 369.9945	38-root 3 freq=

noot= 62.5	24-root 2 freq= 99.4243	38-root 3 freq=	noot= 110.5	24-root 2 freq= 397.6972	38-root 3 freq=
99.53812			398.7208		
noot= 63	24-root 2 freq= 100.8705	38-root 3 freq=	noot= 111	24-root 2 freq= 403.4818	38-root 3 freq=
100.9874			404.5264		
noot= 63.5	24-root 2 freq= 102.3376	38-root 3 freq=	noot= 111.5	24-root 2 freq= 409.3506	38-root 3 freq=
102.4578			410.4164		
noot= 64	24-root 2 freq= 103.8262	38-root 3 freq=	noot= 112	24-root 2 freq= 415.3048	38-root 3 freq=
103.9497			416.3923		
noot= 64.5	24-root 2 freq= 105.3364	38-root 3 freq=	noot= 112.5	24-root 2 freq= 421.3455	38-root 3 freq=
105.4632			422.4551		
noot= 65	24-root 2 freq= 106.8685	38-root 3 freq=	noot= 113	24-root 2 freq= 427.4741	38-root 3 freq=
106.9988			428.6062		
noot= 65.5	24-root 2 freq= 108.423	38-root 3 freq=	noot= 113.5	24-root 2 freq= 433.6919	38-root 3 freq=
108.5568			434.8469		
noot= 66	24-root 2 freq= 110	38-root 3 freq=	noot= 114	24-root 2 freq= 440.0001	38-root 3 freq=
110.1374			441.1784		
noot= 66.5	24-root 2 freq= 111.6	38-root 3 freq=	noot= 114.5	24-root 2 freq= 446.4	38-root 3 freq=
111.741			447.6022		
noot= 67	24-root 2 freq= 113.2233	38-root 3 freq=	noot= 115	24-root 2 freq= 452.8931	38-root 3 freq=
113.368			454.1195		
noot= 67.5	24-root 2 freq= 114.8701	38-root 3 freq=	noot= 115.5	24-root 2 freq= 459.4805	38-root 3 freq=
115.0187			460.7316		
noot= 68	24-root 2 freq= 116.541	38-root 3 freq=	noot= 116	24-root 2 freq= 466.1638	38-root 3 freq=
116.6934			467.4401		
noot= 68.5	24-root 2 freq= 118.2361	38-root 3 freq=	noot= 116.5	24-root 2 freq= 472.9443	38-root 3 freq=
118.3925			474.2462		
noot= 69	24-root 2 freq= 119.9559	38-root 3 freq=	noot= 117	24-root 2 freq= 479.8235	38-root 3 freq=
120.1164			481.1514		
noot= 69.5	24-root 2 freq= 121.7007	38-root 3 freq=	noot= 117.5	24-root 2 freq= 486.8027	38-root 3 freq=
121.8653			488.1572		
noot= 70	24-root 2 freq= 123.4708	38-root 3 freq=	noot= 118	24-root 2 freq= 493.8834	38-root 3 freq=
123.6397			495.2649		
noot= 70.5	24-root 2 freq= 125.2668	38-root 3 freq=	noot= 118.5	24-root 2 freq= 501.0671	38-root 3 freq=
125.44			502.4762		
noot= 71	24-root 2 freq= 127.0888	38-root 3 freq=	noot= 119	24-root 2 freq= 508.3553	38-root 3 freq=
127.2664			509.7924		
noot= 71.5	24-root 2 freq= 128.9374	38-root 3 freq=	noot= 119.5	24-root 2 freq= 515.7494	38-root 3 freq=
129.1195			517.2153		
			noot= 120	24-root 2 freq= 523.2512	38-root 3 freq=
			524.7461		

**Kwarttoonskwintencirkels in gelijkzwevende stemmingen:**

in kwinten van 13 kwarttonen (te kleine kwinten, gelegen tussen de tritonus en de gelijkzwevende kwint):

13	60.00
2	66.50
15	61.00
4	67.50
17	62.00
6	68.50
19	63.00
8	69.50
21	64.00
10	70.50
23	65.00
12	71.50
1	66.00
14	60.50
3	67.00
16	61.50
5	68.00
18	62.50
7	69.00
20	63.50
9	70.00
22	64.50
11	71.00
0	65.50

Hiermee kunnen we 24 kwarttonen bereiken en de gehele cirkel doorlopen. Alleen in een harmonie die deze kwinten gebruikt kan doorheen het hele toonsysteem gemoduleerd worden. Deze kwinten zijn evenwel niet bepaald konsonant te noemen. Niettemin is het compositorisch een erg interessant systeem omdat het diverse stelsels van functionele harmonie mogelijk maakt.

In kwinten van 15 kwarttonen (te grote kwinten):

15	60.00
6	67.50
21	63.00
12	70.50
3	66.00
18	61.50
9	69.00
0	64.50

Hiermee kunnen we 8 kwarttonen bereiken. Met zulke kwinten bestaan er binnen het kwarttoonssysteem 3 verschillende sluitende kwintencirkels. Binnen elk kwintencirkelsysteem kunnen 8 andere intervallen bereikt worden, maar het is niet mogelijk van de ene cirkel naar een van de andere te moduleren met gebruikelijke muzikale technieken. Het naast elkaar bestaan van drie verschillende harmonische werelden, is op zich ook wel een muzikaal gegeven dat heel wat creatieve en originele mogelijkheden schept.

in juiste reine kwinten:

0	60.00	60.00
1	67.02	67.00
2	62.04	62.00
3	69.06	69.00
4	64.08	64.00
5	71.10	71.00
6	66.12	66.00
7	61.14	61.00
8	68.16	68.00
9	63.18	63.00
10	70.20	70.00
11	65.22	65.00
12	60.23	60.00
13	67.25	67.50
14	62.27	62.50
15	69.29	69.50
16	64.31	64.50
17	71.33	71.50
18	66.35	66.50
19	61.37	61.50
20	68.39	68.50
21	63.41	63.50
22	70.43	70.50
23	65.45	65.50
24	60.47	60.50
25	67.49	67.50
26	62.51	62.50
27	69.53	69.50
28	64.55	64.50
29	71.57	71.50
30	66.59	66.50
31	61.61	61.50
32	68.63	68.50
33	63.65	63.50
34	70.66	70.50
35	65.68	65.50
36	60.70	60.50
37	67.72	67.50
38	62.74	62.50
39	69.76	70.00
40	64.78	65.00
41	71.80	72.00
42	66.82	67.00
43	61.84	62.00
44	68.86	69.00
45	63.88	64.00
46	70.90	71.00
47	65.92	66.00
48	60.94	61.00
49	67.96	68.00

50	62.98	63.00
51	70.00	70.00
52	65.02	65.00
53	60.04	60.00

aantal noten: 53

In het gewone kwarttoonssysteem bestaan naast elkaar twee onafhankelijke kwintencirkels. Het is niet mogelijk van het ene systeem naar het andere te moduleren via kwinten. Op grond daarvan maken heel wat van de harmonische systemen voor kwarttoonsmuziek dan ook eerder gebruik van de tweemaal grotere differentiëmogelijkheden van de tertsen, met behoud van de 'traditionele' kwinten. Alleen mits een 53-toons systeem (zoals hierboven aangetoond en berekend, en eerder in deze uiteenzetting becommentarieerd), sluit de kwintencirkel zich doorheen alle 24 kwarttonen.

Alle systemen die halve tonen verder onderverdelen, zijn verenigbaar met de traditionele westerse muziek. We vermelden daarvan alleen de verdeling in zesde-tonen (dit is de stemming waarin de cellist Franklin Cox zich bekwaamde). We zien onmiddellijk dat dergelijke oktaafverdeling geen voordelen oplevert op het vlak van platonische juistheid der intervallen. Ze is gewoon kwazi identisch met die van de gewone gelijkzwevende stemming..

Zesde-toonssysteem: halve toon bestaat uit 3 stappen, dus 36 onderverdelingen per oktaaf:

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:  $15.64 \cdot 2^{(9/36)}$ . Interval: 60 63  
 Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:  $-13.69 \cdot 2^{(12/36)}$ . Interval: 60 64  
 Juistheid van de 4:3 kwart in cent:  $-1.95 \cdot 2^{(15/36)}$ . Interval: 60 65  
 Juistheid van de 3:2 kwint in cent:  $1.96 \cdot 2^{(21/36)}$ . Interval: 60 67

Achtste tonen werden alleen, wellicht eerder als conceptueel begrip, door sommige komponisten toegepast. Een kompositorisch, laat staan harmonisch systeem, werd uitgaande van een dergelijke granulatie bij ons weten nooit ontwikkeld.

Achtste toonsysteem: 48 onderverdelingen per oktaaf:

Juistheid van de 6:5 kleine terts in cent:  $-9.36 \cdot 2^{(13/48)}$ . Interval: 60 63.25  
 Juistheid van de 5:4 grote terts in cent:  $11.31 \cdot 2^{(15/48)}$ . Interval: 60 63.75  
 Juistheid van de 4:3 kwart in cent:  $-1.95 \cdot 2^{(20/48)}$ . Interval: 60 65  
 Juistheid van de 3:2 kwint in cent:  $1.96 \cdot 2^{(28/48)}$ . Interval: 60 67

We merken op dat de kwinten er bij verdere redelijke verdelingen niet beter op worden. Alleen bij de tertsen is er een merkbare verbetering naarmate de verdeling groter wordt. De differentiatie van de verschillende mogelijke tertsen neemt uiteraard sterk toe.

**tabellen met de afwijkingen tegenover de juiste boventoonsstemming van alle gelijkzwevende stemmingen opgebouwd uit 7 tot 53 intervallen per oktaaf:**

## **Gelijkzwevende verdelingen van het oktaaf**

Overzicht over de juistheid van de basisintervallen in diverse getemperde stemmings afgemeten aan de geïdealiseerde intervallen uit de majeur en mineur juiste boventoonsladders. De intervallen zijn uitgedrukt in halve tonen, de fout in cent.

De tabel is opgesteld voor diverse onderverdelingen van het oktaaf (root=2). Betekenis van de referentie interval waarden:

- 2 = juiste boventoons seconde (9:8)
- 3 = juiste boventoons kleine terts (6:5)
- 4 = juiste boventoons grote terts (5:4)

- 5 = juiste boventoons kwart (rein) (4:3)
- 7 = juiste bovenstoons kwint (rein) (3:2)
- 8 = juiste boventoons mineur sixt (8:5)
- 9 = juiste boventoons majeure sixt (5:3)
- 10 = juiste boventoons mineur kleine septiem (9:5)
- 11 = juiste boventoons majeure grote septiem (15:8)
- 12 = juiste boventoons oktaaf (2:1)

Root: 2      Aantal verdelingen: 7 interval: 2      fout: 32.48 interval: 3      fout:-27.22 interval: 4      fout: 43.46 interval: 5      fout:-16.24 interval: 7      fout: 16.24 interval: 8      fout:-43.46 interval: 9      fout: 27.22 interval: 10      fout:-10.97 interval: 11      fout: 59.7 interval: 12      fout: 0	Root: 2      Aantal verdelingen: 30 interval: 2      fout: 3.91 interval: 3      fout:- 4.36 interval: 4      fout:- 13.69 interval: 5      fout: 18.05 interval: 7      fout:- 18.05 interval: 8      fout: 13.69 interval: 9      fout: 4.36 interval: 10      fout: 17.6 interval: 11      fout: 8.27 interval: 12      fout: 0
Root: 2      Aantal verdelingen: 8 interval: 2      fout: 53.91 interval: 3      fout: 15.64 interval: 4      fout:-63.69 interval: 5      fout: 48.05 interval: 7      fout:-48.04 interval: 8      fout: 63.69 interval: 9      fout:-15.64 interval: 10      fout:-32.4 interval: 11      fout: 38.27 interval: 12      fout: 0	Root: 2      Aantal verdelingen: 31 interval: 2      fout: 10.36 interval: 3      fout: 5.96 interval: 4      fout:-.78 interval: 5      fout:- 5.18 interval: 7      fout: 5.18 interval: 8      fout: . 78 interval: 9      fout:- 5.96 interval: 10      fout: 11.14 interval: 11      fout: 4.4 interval: 12      fout: 0
Root: 2      Aantal verdelingen: 9 interval: 2      fout:-62.76 interval: 3      fout: 48.97 interval: 4      fout:-13.69 interval: 5      fout:-35.29 interval: 7      fout: 35.29 interval: 8      fout: 13.69 interval: 9      fout:-48.97 interval: 10      fout:-49.07 interval: 11      fout: 21.6 interval: 12      fout: 0	Root: 2      Aantal verdelingen: 32 interval: 2      fout: 16.41 interval: 3      fout: 15.64 interval: 4      fout: 11.31 interval: 5      fout: 10.55 interval: 7      fout:- 10.54 interval: 8      fout:- 11.31 interval: 9      fout:- 15.64 interval: 10      fout: 5.1 interval: 11      fout: . 77 interval: 12      fout: 0
Root: 2      Aantal verdelingen: 10 interval: 2      fout:-36.09 interval: 3      fout:-44.36	Root: 2      Aantal verdelingen: 33 interval: 2      fout:- 14.27

interval: 4	fout: 26.31
interval: 5	fout: 18.05
interval: 7	fout:-18.05
interval: 8	fout:-26.31
interval: 9	fout: 44.36
interval: 10	fout: 57.6
interval: 11	fout: 8.27
interval: 12	fout: 0

interval: 3	fout:-
11.63	
interval: 4	fout:-
13.69	
interval: 5	fout:-
11.05	
interval: 7	fout:
11.05	
interval: 8	fout:
13.69	
interval: 9	fout:
11.63	
interval: 10	
fout:-.59	
interval: 11	fout:-
2.64	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 11

interval: 2	fout:-14.27
interval: 3	fout:-11.63
interval: 4	fout:-50.05
interval: 5	fout:-47.41
interval: 7	fout: 47.41
interval: 8	fout: 50.05
interval: 9	fout: 11.63
interval: 10	fout: 35.78
interval: 11	fout:-2.64
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 34

interval: 2	fout:-
7.85	
interval: 3	fout:-
2.01	
interval: 4	fout:-
1.92	
interval: 5	fout:
3.93	
interval: 7	fout:-
3.93	
interval: 8	fout:
1.92	
interval: 9	fout:
2.01	
interval: 10	fout:-
5.93	
interval: 11	fout:-
5.85	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 12 [dit is de gewone verdeling]

interval: 2	fout: 3.91
interval: 3	fout: 15.64
interval: 4	fout:-13.69
interval: 5	fout:-1.95
interval: 7	fout: 1.96
interval: 8	fout: 13.69
interval: 9	fout:-15.64
interval: 10	fout: 17.6
interval: 11	fout:-11.73
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 35

interval: 2	fout:-
1.8	
interval: 3	fout:
7.07	
interval: 4	fout:
9.17	
interval: 5	fout:-
16.24	
interval: 7	fout:
16.24	
interval: 8	fout:-
9.17	
interval: 9	fout:-
7.07	
interval: 10	fout:-
10.97	
interval: 11	fout:-
8.87	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 13

interval: 2	fout: 19.29
interval: 3	fout: 38.72
interval: 4	fout: 17.08
interval: 5	fout: 36.51
interval: 7	fout:-36.51
interval: 8	fout:-17.08
interval: 9	fout:-38.72
interval: 10	fout: 2.21
interval: 11	fout:-19.42
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 36

interval: 2	fout:
3.91	
interval: 3	fout:
15.64	
interval: 4	fout:-
13.69	
interval: 5	fout:-
1.95	
interval: 7	fout:
1.96	
interval: 8	fout:
13.69	
interval: 9	fout:-
15.64	

interval: 10	fout:-
15.74	
interval: 11	fout:-
11.73	
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 14
interval: 2	fout: 32.48
interval: 3	fout:-27.22
interval: 4	fout:-42.26
interval: 5	fout:-16.24
interval: 7	fout: 16.24
interval: 8	fout: 42.26
interval: 9	fout: 27.22
interval: 10	fout:-10.97
interval: 11	fout:-26.02
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 37
interval: 2	fout:
9.32	
interval: 3	fout:-
8.68	
interval: 4	fout:-
2.88	
interval: 5	fout:
11.56	
interval: 7	fout:-
11.56	
interval: 8	fout:
2.88	
interval: 9	fout:
8.68	
interval: 10	fout:
12.19	
interval: 11	fout:-
14.43	
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 15
interval: 2	fout:-36.09
interval: 3	fout:-4.36
interval: 4	fout:-13.69
interval: 5	fout: 18.05
interval: 7	fout:-18.05
interval: 8	fout: 13.69
interval: 9	fout: 4.36
interval: 10	fout:-22.4
interval: 11	fout:-31.73
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 38
interval: 2	fout:
14.44	
interval: 3	fout:-.15
interval: 4	fout:
7.37	
interval: 5	fout:-
7.22	
interval: 7	fout:
7.22	
interval: 8	fout:-
7.37	
interval: 9	fout: .
15	
interval: 10	fout:
7.07	
interval: 11	fout:
14.58	
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 16
interval: 2	fout:-21.09
interval: 3	fout: 15.64
interval: 4	fout: 11.31
interval: 5	fout:-26.95
interval: 7	fout: 26.96
interval: 8	fout:-11.31
interval: 9	fout:-15.64
interval: 10	fout:-32.4
interval: 11	fout:-36.73
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 39
interval: 2	fout:-
11.47	
interval: 3	fout:
7.95	
interval: 4	fout:-
13.69	
interval: 5	fout:
5.74	
interval: 7	fout:-
5.74	
interval: 8	fout:
13.69	
interval: 9	fout:-
7.95	
interval: 10	fout:
2.21	
interval: 11	fout:
11.35	
interval: 12	fout: 0

Root: 2	Aantal verdelingen: 17
interval: 2	fout:-7.85
interval: 3	fout: 33.29
interval: 4	fout: 33.37
interval: 5	fout: 3.93

Root: 2	Aantal verdelingen: 40
interval: 2	fout:-
6.09	
interval: 3	fout:-
14.36	



interval: 7	fout: -3.93
interval: 8	fout: -33.37
interval: 9	fout: -33.29
interval: 10	fout: 29.36
interval: 11	fout: 29.45
interval: 12	fout: 0

interval: 4	fout: -
3.69	
interval: 5	fout: -
11.95	
interval: 7	fout: -
11.96	
interval: 8	fout: -
3.69	
interval: 9	fout: -
14.36	
interval: 10	fout: -
2.4	
interval: 11	fout: -
8.27	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 18

interval: 2	fout: 3.91
interval: 3	fout: -17.69
interval: 4	fout: -13.69
interval: 5	fout: 31.38
interval: 7	fout: -31.38
interval: 8	fout: 13.69
interval: 9	fout: 17.69
interval: 10	fout: 17.6
interval: 11	fout: 21.6
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 41

interval: 2	fout: -.97
interval: 3	fout: -
6.31	
interval: 4	fout: -
5.83	
interval: 5	fout: .
48	
interval: 7	fout: -.48
5.83	
interval: 8	fout: -
6.31	
interval: 9	fout: -
6.79	
interval: 10	fout: -
6.79	
interval: 11	fout: -
5.34	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 19

interval: 2	fout: 14.44
interval: 3	fout: -.15
interval: 4	fout: 7.37
interval: 5	fout: -7.22
interval: 7	fout: 7.22
interval: 8	fout: -7.37
interval: 9	fout: .15
interval: 10	fout: 7.07
interval: 11	fout: 14.58
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 42

interval: 2	fout: -
3.91	
interval: 3	fout: -
1.36	
interval: 4	fout: -
13.69	
interval: 5	fout: -
12.33	
interval: 7	fout: -
12.33	
interval: 8	fout: -
13.69	
interval: 9	fout: -
1.36	
interval: 10	fout: -
10.97	
interval: 11	fout: -
2.55	
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 20

interval: 2	fout: 23.91
interval: 3	fout: 15.64
interval: 4	fout: 26.31
interval: 5	fout: 18.05
interval: 7	fout: -18.05
interval: 8	fout: -26.31
interval: 9	fout: -15.64
interval: 10	fout: -2.4
interval: 11	fout: 8.27
interval: 12	fout: 0

Root: 2      Aantal verdelingen: 43

interval: 2	fout: -
8.56	
interval: 3	fout: -
8.66	
interval: 4	fout: -
4.38	
interval: 5	fout: -
4.28	
interval: 7	fout: -
4.28	
interval: 8	fout: -
4.38	
interval: 9	fout: -
8.66	
interval: 10	fout: -
12.94	

		interval: 11	fout: -.1
		interval: 12	fout: 0
Root: 2	Aantal verdelingen: 21		
interval: 2	fout: -24.66		
interval: 3	fout: -27.22		
interval: 4	fout: -13.69		
interval: 5	fout: -16.24		
interval: 7	fout: 16.24		
interval: 8	fout: 13.69		
interval: 9	fout: 27.22		
interval: 10	fout: -10.97		
interval: 11	fout: 2.55		
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 44		
interval: 2	fout: 13		
interval: 3	fout: -		
11.63			
interval: 4	fout: -		
4.5			
interval: 5	fout: -		
7.14			
interval: 7	fout: -		
7.14			
interval: 8	fout: -		
4.5			
interval: 9	fout: -		
11.63			
interval: 10	fout: -		
8.51			
interval: 11	fout: -		
2.64			
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 22		
interval: 2	fout: -14.27		
interval: 3	fout: -11.63		
interval: 4	fout: 4.5		
interval: 5	fout: 7.14		
interval: 7	fout: -7.14		
interval: 8	fout: -4.5		
interval: 9	fout: 11.63		
interval: 10	fout: -18.77		
interval: 11	fout: -2.64		
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 45		
interval: 2	fout: -		
9.42			
interval: 3	fout: -		
4.36			
interval: 4	fout: -		
12.98			
interval: 5	fout: -		
8.62			
interval: 7	fout: -		
8.62			
interval: 8	fout: -		
12.98			
interval: 9	fout: -		
4.36			
interval: 10	fout: -		
4.26			
interval: 11	fout: -		
5.06			
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 23		
interval: 2	fout: -4.79		
interval: 3	fout: 2.6		
interval: 4	fout: 21.1		
interval: 5	fout: -23.69		
interval: 7	fout: 23.69		
interval: 8	fout: -21.1		
interval: 9	fout: -2.6		
interval: 10	fout: -25.88		
interval: 11	fout: -7.38		
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 46		
interval: 2	fout: -		
4.79			
interval: 3	fout: -		
2.6			
interval: 4	fout: -		
4.99			
interval: 5	fout: -		
2.39			
interval: 7	fout: -		
2.39			
interval: 8	fout: -		
4.99			
interval: 9	fout: -		
2.6			
interval: 10	fout: -		
21			
interval: 11	fout: -		
7.38			
interval: 12	fout: 0		
Root: 2	Aantal verdelingen: 24		
interval: 2	fout: 3.91		
interval: 3	fout: 15.64		
interval: 4	fout: -13.69		
interval: 5	fout: -1.95		
interval: 7	fout: 1.96		
interval: 8	fout: 13.69		
interval: 9	fout: -15.64		
Root: 2	Aantal verdelingen: 47		
interval: 2	fout: -		
fout: -.35			
interval: 3	fout: -		
9.26			
interval: 4	fout: -		
3.34			
interval: 5	fout: -		
12.59			

interval: 10            fout: 17.6  
interval: 11            fout: -11.73  
interval: 12            fout: 0

interval: 7            fout:  
12.59  
interval: 8            fout: -  
3.33  
interval: 9            fout: -  
9.26  
interval: 10            fout: -  
3.68  
interval: 11            fout: -  
9.6  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 25  
interval: 2            fout: 11.91  
interval: 3            fout: -20.36  
interval: 4            fout: 2.31  
interval: 5            fout: 18.05  
interval: 7            fout: -18.05  
interval: 8            fout: -2.31  
interval: 9            fout: 20.36  
interval: 10            fout: 9.6  
interval: 11            fout: -15.73  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 48  
interval: 2            fout:  
3.91  
interval: 3            fout: -  
9.36  
interval: 4            fout:  
11.31  
interval: 5            fout: -  
1.95  
interval: 7            fout:  
1.96  
interval: 8            fout: -  
11.31  
interval: 9            fout:  
9.36  
interval: 10            fout: -  
7.4  
interval: 11            fout: -  
11.73  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 26  
interval: 2            fout: 19.29  
interval: 3            fout: -7.44  
interval: 4            fout: 17.08  
interval: 5            fout: -9.65  
interval: 7            fout: 9.65  
interval: 8            fout: -17.08  
interval: 9            fout: 7.44  
interval: 10            fout: 2.21  
interval: 11            fout: -19.42  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 49  
interval: 2            fout:  
7.99  
interval: 3            fout: -  
2.73  
interval: 4            fout: -  
5.52  
interval: 5            fout:  
8.25  
interval: 7            fout: -  
8.25  
interval: 8            fout:  
5.52  
interval: 9            fout:  
2.73  
interval: 10            fout: -  
10.97  
interval: 11            fout:  
10.72  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 27  
interval: 2            fout: -18.31  
interval: 3            fout: 4.53  
interval: 4            fout: -13.69  
interval: 5            fout: 9.16  
interval: 7            fout: -9.16  
interval: 8            fout: 13.69  
interval: 9            fout: -4.53  
interval: 10            fout: -4.63  
interval: 11            fout: 21.6  
interval: 12            fout: 0

Root: 2            Aantal verdelingen: 50  
interval: 2            fout:  
11.91  
interval: 3            fout:  
3.64  
interval: 4            fout:  
2.31  
interval: 5            fout: -  
5.95  
interval: 7            fout:  
5.96  
interval: 8            fout: -  
2.31  
interval: 9            fout: -  
3.64  
interval: 10            fout:  
9.6  
interval: 11            fout:  
8.27  
interval: 12            fout: 0

<pre> Root: 2      Aantal verdelingen: 28 interval: 2      fout:-10.38 interval: 3      fout: 15.64 interval: 4      fout: .6 interval: 5      fout:-16.24 interval: 7      fout: 16.24 interval: 8      fout:-.6 interval: 9      fout:-15.64 interval: 10     fout:-10.97 interval: 11     fout: 16.84 interval: 12     fout: 0 </pre>	<pre> Root: 2      Aantal verdelingen: 51 interval: 2      fout:- 7.85 interval: 3      fout: 9.76 interval: 4      fout: 9.84 interval: 5      fout: 3.93 interval: 7      fout:- 3.93 interval: 8      fout:- 9.84 interval: 9      fout:- 9.76 interval: 10     fout: 5.83 interval: 11     fout: 5.92 interval: 12     fout: 0 </pre>
<pre> Root: 2      Aantal verdelingen: 29 interval: 2      fout:-2.99 interval: 3      fout:-15.39 interval: 4      fout: 13.9 interval: 5      fout: 1.49 interval: 7      fout:-1.49 interval: 8      fout:-13.9 interval: 9      fout: 15.39 interval: 10     fout:-16.89 interval: 11     fout: 12.41 interval: 12     fout: 0 </pre>	<pre> Root: 2      Aantal verdelingen: 52 interval: 2      fout:- 3.78 interval: 3      fout:- 7.44 interval: 4      fout:- 5.99 interval: 5      fout:- 9.65 interval: 7      fout: 9.65 interval: 8      fout: 5.99 interval: 9      fout: 7.44 interval: 10     fout: 2.21 interval: 11     fout: 3.65 interval: 12     fout: 0 </pre>
	<pre> Root: 2      Aantal verdelingen: 53 interval: 2      fout: . 14 interval: 3      fout:- 1.34 interval: 4      fout: 1.41 interval: 5      fout:-.07 interval: 7      fout: . 07 interval: 8      fout:- 1.41 interval: 9      fout: 1.34 interval: 10     fout:- 1.27 interval: 11     fout: 1.48 interval: 12     fout: 0 </pre>

## Gelijkzwevende verdelingen van de duodeciem

Overzicht over de juistheid van de basisintervallen in diverse getemperde stemmingen afgemeten aan de geïdealiseerde intervallen uit de majeur en mineur juiste boventoonsladders. De intervallen zijn uitgedrukt in halve tonen, de fout in cent. De tabel is opgesteld voor diverse onderverdelingen van de duodeciem (root=3).

## Betekenis van de referentie interval waarden:

- 2 = juiste boventoons seconde (9:8)
- 3 = juiste boventoons kleine tert (6:5)
- 4 = juiste boventoons grote tert (5:4)
- 5 = juiste boventoons kwart (rein) (4:3)
- 7 = juiste bovenstoons kwint (rein) (3:2)
- 8 = juiste boventoons mineur sixt (8:5)
- 9 = juiste boventoons majeur sixt (5:3)
- 10 = juiste boventoons mineur kleine septiem (9:5)
- 11 = juiste boventoons majeur grote septiem (15:8)
- 12 = juiste boventoons oktaaf (2:1)

Root: 3      Aantal verdelingen: 7 interval: 2      fout:- 67.8 interval: 3      fout: 43.93 interval: 4      fout: 114.61 interval: 5      fout:- 45.37 interval: 7      fout:- 113.17 interval: 8      fout:- 1.44 interval: 9      fout: 69.24 interval: 10      fout:- 69.24 interval: 11      fout: 1.44 interval: 12      fout: 113.17	Root: 3      Aantal verdelingen: 23 interval: 2      fout: 38.52 interval: 3      fout:- 15.13 interval: 4      fout:- 27.15 interval: 5      fout: 1.88 interval: 7      fout: 40.41 interval: 8      fout:- 13.25 interval: 9      fout:- 25.27 interval: 10      fout: 25.27 interval: 11      fout: 13.25 interval: 12      fout:- 40.41	Root: 3      Aantal verdelingen: 39 interval: 2      fout: 8.84 interval: 3      fout: 23.03 interval: 4      fout:- 3.83 interval: 5      fout: 10.36 interval: 7      fout: 19.2 interval: 8      fout:- 15.37 interval: 9      fout: 6.53 interval: 10      fout:- 6.53 interval: 11      fout: 15.37 interval: 12      fout:- 19.2
Root: 3      Aantal verdelingen: 8 interval: 2      fout:- 33.83 interval: 3      fout: 77.9 interval: 4      fout:- 89.18 interval: 5      fout: 22.56 interval: 7      fout:- 11.28 interval: 8      fout: 100.45 interval: 9      fout:- 66.62 interval: 10      fout: 66.62 interval: 11      fout:- 100.45 interval: 12      fout: 11.28	Root: 3      Aantal verdelingen: 24 interval: 2      fout:- 33.83 interval: 3      fout:- 1.35 interval: 4      fout:- 9.93 interval: 5      fout: 22.56 interval: 7      fout:- 11.28 interval: 8      fout: 21.21 interval: 9      fout: 12.63 interval: 10      fout:- 12.63 interval: 11      fout:- 21.21 interval: 12      fout: 11.28	Root: 3      Aantal verdelingen: 40 interval: 2      fout: 13.71 interval: 3      fout:- 17.2 interval: 4      fout: 5.92 interval: 5      fout: 22.56 interval: 7      fout:- 11.28 interval: 8      fout: 5.36 interval: 9      fout:- 19.07 interval: 10      fout: 19.07 interval: 11      fout:- 5.36 interval: 12      fout: 11.28
Root: 3      Aantal verdelingen: 9 interval: 2      fout:- 7.42 interval: 3      fout: 104.31 interval: 4      fout:- 36.34 interval: 5      fout: 75.39 interval: 7      fout: 67.97 interval: 8      fout:- 31.63 interval: 9      fout: 39.05 interval: 10      fout:- 39.05	Root: 3      Aantal verdelingen: 25 interval: 2      fout:- 24.32 interval: 3      fout: 11.33 interval: 4      fout: 5.92 interval: 5      fout:- 34.5 interval: 7      fout: 17.25 interval: 8      fout:- 23.17 interval: 9      fout:- 28.58 interval: 10      fout: 28.58	Root: 3      Aantal verdelingen: 41 interval: 2      fout: 18.35 interval: 3      fout:- 9.08 interval: 4      fout: 15.2 interval: 5      fout:- 12.24 interval: 7      fout: 6.12 interval: 8      fout:- 21.32 interval: 9      fout: 2.96 interval: 10      fout:- 2.96

interval: 11            fout: 31.63 interval: 12            fout:- 67.97	interval: 11            fout: 23.17 interval: 12            fout:- 17.25	interval: 11            fout: 21.32 interval: 12            fout:- 6.12
Root: 3            Aantal verdelingen: 10 interval: 2            fout: 13.71 interval: 3            fout:- 64.75 interval: 4            fout: 5.92 interval: 5            fout:- 72.54 interval: 7            fout:- 58.83 interval: 8            fout: 52.9 interval: 9            fout:- 66.62 interval: 10            fout: 66.62 interval: 11            fout:- 52.9 interval: 12            fout: 58.83	Root: 3            Aantal verdelingen: 26 interval: 2            fout:- 15.55 interval: 3            fout: 23.03 interval: 4            fout: 20.55 interval: 5            fout:- 14.02 interval: 7            fout:- 29.57 interval: 8            fout: 9.01 interval: 9            fout: 6.53 interval: 10            fout:- 6.53 interval: 11            fout:- 9.01 interval: 12            fout: 29.57	Root: 3            Aantal verdelingen: 42 interval: 2            fout:- 22.51 interval: 3            fout:- 1.35 interval: 4            fout:- 21.25 interval: 5            fout:- fout:-.09 interval: 7            fout:- 22.6 interval: 8            fout:- 1.44 interval: 9            fout:- 21.33 interval: 10            fout: 21.33 interval: 11            fout: 1.44 interval: 12            fout: 22.6
Root: 3            Aantal verdelingen: 11 interval: 2            fout: 31 interval: 3            fout:- 30.17 interval: 4            fout: 40.5 interval: 5            fout:- 20.67 interval: 7            fout: 10.34 interval: 8            fout:- 50.84 interval: 9            fout: 19.83 interval: 10            fout:- 19.83 interval: 11            fout: 50.84 interval: 12            fout:- 10.33	Root: 3            Aantal verdelingen: 27 interval: 2            fout:- 7.42 interval: 3            fout: 33.87 interval: 4            fout: 34.1 interval: 5            fout: 4.95 interval: 7            fout:- 2.47 interval: 8            fout:- 31.63 interval: 9            fout:- 31.4 interval: 10            fout: 31.4 interval: 11            fout: 31.63 interval: 12            fout: 2.47	Root: 3            Aantal verdelingen: 43 interval: 2            fout:- 17.25 interval: 3            fout: 6.02 interval: 4            fout:- 11.77 interval: 5            fout: 11.5 interval: 7            fout:- 5.75 interval: 8            fout: 17.52 interval: 9            fout:- fout:-.27 interval: 10            fout: . 27 interval: 11            fout:- 17.52 interval: 12            fout: 5.75
Root: 3            Aantal verdelingen: 12 interval: 2            fout: 45.41 interval: 3            fout:- 1.35 interval: 4            fout: 69.32 interval: 5            fout: 22.56 interval: 7            fout: 67.97 interval: 8            fout: 21.21 interval: 9            fout:- 66.62 interval: 10            fout: 66.62 interval: 11            fout:- 21.21 interval: 12            fout:- 67.97	Root: 3            Aantal verdelingen: 28 interval: 2            fout: . 13 interval: 3            fout:- 23.99 interval: 4            fout:- 21.25 interval: 5            fout: 22.56 interval: 7            fout: 22.69 interval: 8            fout:- 1.44 interval: 9            fout: 1.31 interval: 10            fout:- 1.31 interval: 11            fout: 1.44 interval: 12            fout:- 22.69	Root: 3            Aantal verdelingen: 44 interval: 2            fout:- 12.22 interval: 3            fout: 13.06 interval: 4            fout:- 2.72 interval: 5            fout:- 20.67 interval: 7            fout: 10.34 interval: 8            fout:- 7.61 interval: 9            fout: 19.83 interval: 10            fout:- 19.83 interval: 11            fout: 7.61 interval: 12            fout:- 10.33
Root: 3            Aantal verdelingen: 13 interval: 2            fout: 57.61 interval: 3            fout: 57.61	Root: 3            Aantal verdelingen: 29 interval: 2            fout: 7.16 interval: 3            fout:- 7.16	Root: 3            Aantal verdelingen: 45 interval: 2            fout:- 7.42 interval: 3            fout: 7.42



52.25 interval: 10 fout:- 52.25 interval: 11 fout: 18.42 interval: 12 fout: 11.28	7.18 interval: 10 fout: 7.18 interval: 11 fout: 18.42 interval: 12 fout: 11.28	12.63 interval: 10 fout:- 12.63 interval: 11 fout: 18.42 interval: 12 fout: 11.28
Root: 3      Aantal verdelingen: 17 interval: 2      fout:- 19.85 interval: 3      fout:-20 interval: 4      fout: 50.67 interval: 5      fout: 50.53 interval: 7      fout: 30.68 interval: 8      fout: 30.53 interval: 9      fout:- 10.68 interval: 10      fout: 10.68 interval: 11      fout:- 30.53 interval: 12      fout:- 30.68	Root: 3      Aantal verdelingen: 33 interval: 2      fout:- 26.63 interval: 3      fout: 27.47 interval: 4      fout:- 17.13 interval: 5      fout:- 20.67 interval: 7      fout: 10.34 interval: 8      fout: 6.8 interval: 9      fout: 19.83 interval: 10      fout:- 19.83 interval: 11      fout:- 6.8 interval: 12      fout:- 10.33	Root: 3      Aantal verdelingen: 49 interval: 2      fout: 9.83 interval: 3      fout: 5.12 interval: 4      fout:- 1.84 interval: 5      fout:- 6.56 interval: 7      fout: 3.28 interval: 8      fout:- 1.44 interval: 9      fout:- 8.4 interval: 10      fout: 8.4 interval: 11      fout: 1.44 interval: 12      fout:- 3.28
Root: 3      Aantal verdelingen: 18 interval: 2      fout:- 7.42 interval: 3      fout:- 1.35 interval: 4      fout:- 36.34 interval: 5      fout:- 30.28 interval: 7      fout:- 37.69 interval: 8      fout:- 31.63 interval: 9      fout: 39.05 interval: 10      fout:- 39.05 interval: 11      fout: 31.63 interval: 12      fout: 37.69	Root: 3      Aantal verdelingen: 34 interval: 2      fout:- 19.85 interval: 3      fout:- 20 interval: 4      fout:- 5.27 interval: 5      fout:- 5.41 interval: 7      fout:- 25.26 interval: 8      fout:- 25.41 interval: 9      fout:- 10.68 interval: 10      fout: 10.68 interval: 11      fout: 25.41 interval: 12      fout: 25.26	Root: 3      Aantal verdelingen: 50 interval: 2      fout: 13.71 interval: 3      fout: 11.33 interval: 4      fout: 5.92 interval: 5      fout: 3.54 interval: 7      fout: 17.25 interval: 8      fout: 14.87 interval: 9      fout: 9.46 interval: 10      fout:- 9.46 interval: 11      fout:- 14.87 interval: 12      fout:- 17.25
Root: 3      Aantal verdelingen: 19 <b>[dit is de kromatische toonladder die we kennen, maar dan gebaseerd op duodeciem temperament]</b>  interval: 2      fout: 3.7 interval: 3      fout: 15.33 interval: 4      fout:- 14.1 interval: 5      fout:- 2.47 interval: 7      fout: 1.24 interval: 8      fout: 12.86 interval: 9      fout:- 16.57 interval: 10      fout: 16.57 interval: 11      fout:- 12.86	Root: 3      Aantal verdelingen: 35 interval: 2      fout:- 13.46 interval: 3      fout:- 10.41 interval: 4      fout: 5.92 interval: 5      fout: 8.97 interval: 7      fout:- 4.49 interval: 8      fout:- 1.44 interval: 9      fout: 14.89 interval: 10      fout:- 14.89 interval: 11      fout: 1.44 interval: 12      fout: 4.49	Root: 3      Aantal verdelingen: 51 interval: 2      fout: 17.44 interval: 3      fout: 17.3 interval: 4      fout: 13.38 interval: 5      fout: 13.23 interval: 7      fout:- 6.62 interval: 8      fout:- 6.76 interval: 9      fout:- 10.68 interval: 10      fout: 10.68 interval: 11      fout: 6.76 interval: 12      fout: 6.62



interval: 12          fout:- 1.24		
Root: 3          Aantal verdelingen: 20 interval: 2          fout: 13.71 interval: 3          fout: 30.35 interval: 4          fout: 5.92 interval: 5          fout: 22.56 interval: 7          fout: 36.27 interval: 8          fout:- 42.19 interval: 9          fout: 28.48 interval: 10          fout:- 28.48 interval: 11          fout: 42.19 interval: 12          fout:- 36.27	Root: 3          Aantal verdelingen: 36 interval: 2          fout:- 7.42 interval: 3          fout:- 1.35 interval: 4          fout: 16.49 interval: 5          fout: 22.56 interval: 7          fout: 15.14 interval: 8          fout: 21.21 interval: 9          fout:- 13.79 interval: 10          fout: 13.79 interval: 11          fout:- 21.21 interval: 12          fout:- 15.14	Root: 3          Aantal verdelingen: 52 interval: 2          fout:- 15.55 interval: 3          fout:- 13.54 interval: 4          fout:- 16.02 interval: 5          fout:- 14.02 interval: 7          fout: 7.01 interval: 8          fout: 9.01 interval: 9          fout: 6.53 interval: 10          fout:- 6.53 interval: 11          fout:- 9.01 interval: 12          fout:- 7.01
Root: 3          Aantal verdelingen: 21 interval: 2          fout: 22.77 interval: 3          fout: 43.93 interval: 4          fout: 24.04 interval: 5          fout: 45.2 interval: 7          fout:- 22.6 interval: 8          fout:- 1.44 interval: 9          fout:- 21.33 interval: 10          fout: 21.33 interval: 11          fout: 1.44 interval: 12          fout: 22.6	Root: 3          Aantal verdelingen: 37 interval: 2          fout:- 1.71 interval: 3          fout: 7.22 interval: 4          fout:- 24.92 interval: 5          fout:- 16 interval: 7          fout:- 17.7 interval: 8          fout:- 8.78 interval: 9          fout: 10.49 interval: 10          fout:- 10.49 interval: 11          fout: 8.78 interval: 12          fout: 17.7	Root: 3          Aantal verdelingen: 53 interval: 2          fout:- 11.41 interval: 3          fout:- 7.33 interval: 4          fout:- 8.43 interval: 5          fout:- 4.36 interval: 7          fout:- 15.76 interval: 8          fout:- 11.69 interval: 9          fout:- 12.79 interval: 10          fout: 12.79 interval: 11          fout: 11.69 interval: 12          fout: 15.76
Root: 3          Aantal verdelingen: 22 interval: 2          fout: 31 interval: 3          fout:- 30.17 interval: 4          fout: 40.5 interval: 5          fout:- 20.67 interval: 7          fout: 10.34 interval: 8          fout: 35.61 interval: 9          fout: 19.83 interval: 10          fout:- 19.83 interval: 11          fout:- 35.61 interval: 12          fout:- 10.33	Root: 3          Aantal verdelingen: 38 interval: 2          fout: 3.7 interval: 3          fout: 15.33 interval: 4          fout:- 14.1 interval: 5          fout:- 2.47 interval: 7          fout: 1.24 interval: 8          fout: 12.86 interval: 9          fout:- 16.57 interval: 10          fout: 16.57 interval: 11          fout:- 12.86 interval: 12          fout:- 1.24	

Wie nog meer tabellen zelf wil uitrekenen stellen we graag de door ons voor dit doel ontwikkelde software ter beschikking.

# NIET GELIJKZWEVENDE PLATONISCHE BOVENTOONSSTEMMINGEN

Alle hier uitgevoerde berekeningen gaan uit van diapason La = 440.0Hz. Noten worden uitgedrukt als fraktionele midi getallen, waarbij noot 60 overeenkomt met de centrale Do (C) op het pianoklavier en in het gelijkzwevend 12-toons getemperd systeem. De reeksen zijn berekend vanaf grondtoon Do (C=36).

Toonreeksen in oplopende harmonische verhoudingen: In de linkerkolom: de boventoonsratio (steeds een verhouding van twee gehele getallen), in de tweede het nootequivalent in fraktionele midi. Dubbels werden in de tabellen weggelaten. ( $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$  enz....)

Alle niet gelijkzwevende stemmingen die op eenvoudige getalverhoudingen zijn gesteund, bestaan uit een selectie uit deze intervallen. Deze selecties kunnen diatonisch zijn (opgebouwd uit twee tetrakorden elk bestaande uit twee soorten intervallen zodat we uitkomen op 7 toontrappen per oktaaf), pentatonisch of kromatisch. Ook toonschalen met 19 en 31 tonen kunnen zo worden samengesteld.

Bij het maken van selecties uit de mogelijke 'juiste' tonen kunnen we enerzijds pogen zo weinig mogelijk verschillende intervallen te gebruiken, zoals bvb in de pythagoreische toonschaal waarin slechts 2 intervallen voorkomen tussen opeenvolgende tonen in de schaal: 9:8 en 256/243. De ladder ziet eruit als:

1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
36.00	38.04		40.98	43.02	45.06		48.00

Maar, afgezien van oktaaf en kwint, komt deze schaal eerder slecht overeen met 'juiste' boventonen. Daarvoor zijn de termen van de verhoudingsgetallen immers veel te groot. De terts bvb.  $81:64 = 1.266$  is heel wat hoger dan de overeenkomstige platonische harmoniek  $5:4 = 1.25$ . Dit maakt de pythagoreische toonschaal eerder ongeschikt voor 'harmonie' hoewel ze op melodisch vlak heel redelijk klinkt. Een akkoord bestaande uit de Do-Mi terts levert immers ca. 16 zwevingen op. Dit valt audioperceptorisch gezien binnen de kritische bandbreedte om het als een dissonant waar te nemen. Het aantal zwevingen voor de bekende gelijkzwevende terts Do-Mi, in dezelfde ligging is slechts ca. 10.

Zarlino poogde in de zestiende eeuw een basis te vinden voor een muziek gebaseerd op de drie harmonische majeur drieklanken: tonika, subdominant, dominant. Hij stelde daarbij voor drie verhoudingen te gebruiken: 1, 5:4, 3:2. Zijn frekwentieverhoudingen komen er uit te zien als:

1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
36.00	38.04	39.86	40.98	43.02	44.84	46.88	48.00

De genoemde drieklanken klinken in deze schaal bijzonder konsonant en zwevingsvrij, maar transpositie naar andere toonaarden wordt nu wel heel erg problematisch. De kwint Re-La levert ons nu immers niet minder dan 11 zwevingen op. Het Zarlino systeem kent drie kwalitatief verschillende intervallen: de halve toon met verhouding 16:5, en twee soorten hele tonen: 9:8 (do-re, fa-sol en la-si) en 10:9 (Si-Do, sol-la). Het verschil tussen deze beide hele tonen nml.  $(9/8)/(10/9) = 81/80 = 1.0125$ . Dit verschil is men de syntonische komma gaan noemen, ongeveer een negende van een toon. Die is verschillend maar numeriek in dezelfde grootteorde dan de pythagoreische komma, die slaat op het niet sluiten van de eerste periode van de kwintenspiraal.

Een vrij gangbare selectie waarmee 12 toontrappen per oktaaf kunnen worden samengesteld wordt gedefinieerd als volgt:

1:1	15:14	10:9	6:5	5:4	4:3	10:7	3:2	5:3	32:19	12:7	15:8
-----	-------	------	-----	-----	-----	------	-----	-----	-------	------	------

In fractionele midi getallen -de cent afwijking tegenover de gelijkzwevende kromatische stemming is het gedeelte na de komma- levert dit volg plaatje op:

36.00	37.19	37.82	39.16	39.86	40.98	42.17	43.02	44.84	45.02	45.33	46.88
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Een nogal uitgebreide en in elk geval het gehele bereik van de gebruikelijke tessituur beslaande berekening van alle platonische intervalverhoudingen geven we hier:

1: 136	16: 3 64.98	28: 1 93.69	33: 1 96.53	39: 1 99.42	43: 1 101.12	
2: 1 48	16: 5 56.14	28: 3 74.67	33: 2 84.53	39: 2 87.42	43: 2 89.12	
3: 1 55.02	16: 7 50.31	28: 5 65.83	33: 4 72.53	39: 4 75.42	43: 3 77.12	82.1
3: 2 43.02	16: 9 45.96	28: 9 55.65	33: 5 68.67	39: 5 71.56	43: 4 73.25	
4: 1 60	16: 11 42.49	28: 11 52.18	33: 7 62.84	39: 7 65.74	43: 5 70.1	
4: 3 40.98	16: 13 39.59	28: 13 49.28	33: 8 60.53	39: 8 63.42	43: 6 67.43	
5: 1 63.86	16: 15 37.12	28: 15 46.81	33: 10 56.67	39: 10 59.56	43: 7 65.12	
5: 2 51.86	17: 1 85.05	28: 17 44.64	33: 13 52.13	39: 11 57.91	43: 8 63.08	
5: 3 44.84	17: 2 73.05	28: 19 42.71	33: 14 50.84	39: 14 53.74	43: 9 61.25	
5: 4 39.86	17: 3 66.03	28: 23 39.41	33: 16 48.53	39: 16 51.42	43: 10 59.6	
6: 1 67.02	17: 4 61.05	28: 25 37.96	33: 17 47.48	39: 17 50.38	43: 11 58.1	
6: 5 39.16	17: 5 57.19	28: 27 36.63	33: 19 45.56	39: 19 48.45	43: 12 56.71	
7: 1 69.69	17: 6 54.03	29: 1 94.3	33: 20 44.67	39: 20 47.56	43: 13 55.43	
7: 2 57.69	17: 7 51.36	29: 2 82.3	33: 23 42.25	39: 22 45.91	43: 14 54.23	
7: 3 50.67	17: 8 49.05	29: 3 75.28	33: 25 40.81	39: 23 45.14	43: 15 52.07	
7: 4 45.69	17: 9 47.01	29: 4 70.3	33: 26 40.13	39: 25 43.7	43: 16 51.08	
7: 5 41.83	17: 10 45.19	29: 5 66.43	33: 28 38.84	39: 28 41.74	43: 17 50.14	
7: 6 38.67	17: 11 43.54	29: 6 63.28	33: 29 38.24	39: 29 41.13	43: 18 49.25	
8: 1 72	17: 12 42.03	29: 7 60.61	33: 31 37.08	39: 31 39.97	43: 19 48.41	
	17: 13 40.64	29: 8 58.3	33: 32 36.53	39: 32 39.42	43: 20 47.6	
	17: 14 39.36	29: 9 56.26	34: 1 97.05	39: 34 38.38	43: 21 46.83	
	17: 15 38.17	29: 10 54.43	34: 3 78.03	39: 35 37.87	43: 22 46.1	
	17: 16 37.05	29: 11 52.78	34: 5 69.19	39: 37 36.91	43: 23 45.39	
	18: 1 86.04	29: 12 51.28	34: 7 63.36	39: 38 36.45	43: 24 44.71	
	18: 5 58.18	29: 13 49.89	34: 9 59.01	40: 1 99.86	43: 25 44.06	
	18: 7 52.35	29: 14 48.61	34: 11 55.54	40: 3 80.84	43: 26 43.28	
	18: 11 44.53	29: 15 47.41	34: 13 52.64	40: 7 66.17	43: 27 43.43	
	18: 13 41.63	29: 16 46.3	34: 15 50.17	40: 9 61.82	43: 28 42.82	
	18: 17 36.99	29: 17 45.25	34: 19 46.07	40: 11 58.35	43: 29 42.23	
	19: 1 86.98	29: 18 44.26	34: 21 44.34	40: 13 55.46	43: 30 41.66	
	19: 2 74.98	29: 19 43.32	34: 23 42.77	40: 17 50.81	43: 31 41.12	
	19: 3 42.43	29: 20 42.43	34: 25 41.32	40: 19 48.89	43: 32 40.58	
					43: 33 40.07	
					43: 34	

67.96	29: 21	34: 27	40: 21	43: 35	
19: 4	41.59	39.99	47.16	39.56	
62.98	29: 22	34: 29	40: 23	43: 36	
19: 5	40.78	38.75	45.58	39.08	
59.11	29: 23	34: 31	40: 27	43: 37	38.6
19: 6	40.01	37.6	40: 29	43: 38	
55.96	29: 24	34: 33	41.57	38.14	
19: 7	39.28	36.52	40: 31	43: 39	
53.29	29: 25	35: 1	40.41	37.69	
19: 8	38.57	97.55	40: 33	43: 40	
50.98	29: 26	35: 2	39.33	37.25	
19: 9	37.89	85.55	40: 37	43: 41	
48.94	29: 27	35: 3	37.35	36.82	
19: 10	37.24	78.53	40: 39	43: 42	36.41
47.11	29: 28	35: 4	36.44		
19: 11	36.61	73.55	41: 1		
45.46	30: 1	35: 6	100.29		
19: 12	94.88	66.53	41: 2		
43.96	30: 7	35: 8	88.29		
19: 13	61.19	61.55	41: 3		
42.57	30: 11	35: 9	81.27		
19: 14	53.37	59.51	41: 4		
41.29	30: 13	35: 11	76.29		
19: 15	50.48	56.04	41: 5		
40.09	30: 17	35: 12	72.43		
19: 16	45.83	54.53	41: 6		
38.98	30: 19	35: 13	69.27		
19: 17	43.91	53.15	41: 7	66.6	
37.93	30: 23	35: 16	41: 8		
19: 18	40.6	49.55	64.29		
36.94	30: 29	35: 17	41: 9		
20: 1	36.59	48.5	62.25		
87.86	31: 1	35: 18	41: 10		
20: 3	95.45	47.51	60.43		
68.84	31: 2	35: 19	41: 11		
20: 7	83.45	46.58	58.78		
54.17	31: 3	35: 22	41: 12		
20: 9	76.43	44.04	57.27		
49.82	31: 4	35: 23	41: 13		
20: 11	71.45	43.27	55.89		
46.35	31: 5	35: 24	41: 14	54.6	
20: 13	67.59	42.53	41: 15		
43.46	31: 6	35: 26	53.41		
20: 17	64.43	41.15	41: 16		
38.81	31: 7	35: 27	52.29		
20: 19	61.76	40.49	41: 17		
36.89	31: 8	35: 29	51.24		
21: 1	59.45	39.26	41: 18		
88.71	31: 9	35: 31	50.25		
21: 2	57.41	38.1	41: 19		
76.71	31: 10	35: 32	49.32		
21: 4	55.59	37.55	41: 20		
64.71	31: 11	35: 33	48.43		
21: 5	53.94	37.02	41: 21		
60.84	31: 12	35: 34	47.58		
21: 8	52.43	36.5	41: 22		
52.71	31: 13	36: 1	46.78		
21: 10	51.05	98.04	41: 23		
48.84	31: 14	36: 5	46.01		
21: 11	49.76	70.18	41: 24		
47.19	31: 15	36: 7	45.27		
21: 13	48.57	64.35	41: 25		
44.3	31: 16	36: 11	44.56		
21: 16	47.45	56.53	41: 26		
40.71	31: 17	36: 13	43.89		
21: 17	46.4	53.63	41: 27		
39.66	31: 18	36: 17	43.23		
21: 19	45.41	48.99	41: 28	42.6	
37.73	31: 19	36: 19			
21: 20	44.48	47.06			
36.84	31: 20	36: 23			
22: 1	43.59	43.76			
89.51	31: 21	42.31			
22: 3	42.74	36: 25			
70.49		36: 29			
22: 5		39.74			
61.65		36: 31			
22: 7		38.59			
55.82		36: 35			
22: 9		36.49			

	51.47 22: 13 45.11 22: 15 42.63 22: 17 40.46 22: 19 38.54 22: 21 36.81 23: 1 90.28 23: 2 78.28 23: 3 71.26 23: 4 66.28 23: 5 62.42 23: 6 59.26 23: 7 56.59 23: 8 54.28 23: 9 52.24 23: 10 50.42 23: 11 48.77 23: 12 47.26 23: 13 45.88 23: 14 44.59 23: 15 43.4 23: 16 42.28 23: 17 41.23 23: 18 40.24 23: 19 39.31 23: 20 38.42 23: 21 37.57 23: 22 36.77		37: 1 98.51 37: 2 86.51 37: 3 79.49 37: 4 74.51 37: 5 70.65 37: 6 67.49 37: 7 64.83 37: 8 62.51 37: 9 60.47 37: 10 58.65 37: 11     57			
8: 3 52.98  8: 5 44.14 8: 7 38.31 9: 1 74.04 9: 2 62.04 9: 4 50.04 9: 5 46.18 9: 7 40.35 9: 8 38.04 10: 1 75.86 10: 3 56.84	24: 1 91.02  24: 5 63.16 24: 7 57.33 24: 11 49.51 24: 13 46.61 24: 17 41.97 24: 19 40.04 24: 23 36.74 25: 1 91.73 25: 2 79.73 25: 3 72.71	31: 22 41.94  31: 23 41.17 31: 24 40.43 31: 25 39.72 31: 26 39.05 31: 27 38.39 31: 28 37.76 31: 29 37.15 31: 30 36.57 32: 1     96 32: 3 76.98 32: 5	37: 12 55.49  37: 13 54.11 37: 14 52.83 37: 15 51.63 37: 16 50.51 37: 17 49.46 37: 18 48.47 37: 19 47.54 37: 20 46.65 37: 21 45.81 37: 22     45 37: 23	41: 29 41.99  41: 30 41.41 41: 31 40.84 41: 32 40.29 41: 33 39.76 41: 34 39.24 41: 35 38.74 41: 36 38.25 41: 37 37.78 41: 38 37.32 41: 39 36.87	44: 1 101.51 44: 3 82.49 44: 5 73.65 44: 7 67.82 44: 9 63.47 44: 13 57.11 44: 15 54.63 44: 17 52.46 44: 19 50.54 44: 21 48.81 44: 23 47.23	46: 1 83: 1 74: 1 68: 1 64: 1 60: 1 57: 1 55: 1 53: 1 51: 1 49: 1

10: 7	25: 4	68.14	44.23	41: 40	44: 25
42.17	67.73	32: 7	37: 24	36.43	45.79
10: 9	25: 6	62.31	43.49	42: 1	44: 27
37.82	60.71	32: 9	37: 25	100.71	44.45
11: 1	25: 7	57.96	42.79	42: 5	44: 29
77.51	58.04	32: 11	37: 26	72.84	43.22
11: 2	25: 8	54.49	42.11	42: 11	44: 31
65.51	55.73	32: 13	37: 27	59.19	42.06
11: 3	25: 9	51.59	41.45	42: 13	44: 35
58.49	53.69	32: 15	37: 28	42: 17	39.96
11: 4	25: 11	49.12	40.83	51.66	44: 37
53.51	50.21	32: 17	37: 29	42: 19	44: 39
11: 5	25: 12	46.95	40.22	49.73	38.09
49.65	48.71	32: 19	37: 30	42: 23	44: 41
11: 6	25: 13	45.02	39.63	46.43	37.22
46.49	47.32	32: 21	37: 31	42: 25	44: 43
11: 7	25: 14	43.29	39.06	44.98	
43.82	46.04	32: 23	37: 32	42: 29	
11: 8	25: 16	41.72	38.51	42.41	
41.51	43.73	32: 25	37: 33	42: 31	
11: 9	25: 17	40.27	37.98	41.26	
39.47	42.68	32: 27	37: 34	42: 37	
11: 10	25: 18	38.94	37.46	38.19	
37.65	41.69	32: 29	37: 35	42: 41	
12: 1	25: 19	37.7	36.96	36.42	
79.02	40.75	32: 31	37: 36		
12: 5	25: 21	36.55	36.47		
51.16	39.02		38: 1		
12: 7	25: 22		98.98		
45.33	38.21		38: 3		
12: 11	25: 23		79.96		
37.51	37.44		38: 5		
13: 1	25: 24		71.11		
80.41	36.71		38: 7		
13: 2	26: 1		65.29		
68.41	92.41		38: 9		
13: 3	26: 3		60.94		
61.39	73.39		38: 11		
13: 4	26: 5		57.46		
56.41	64.54		38: 13		
13: 5	26: 7		54.57		
52.54	58.72		38: 15		
13: 6	26: 9		52.09		
49.39	54.37		38: 17		
13: 7	26: 11		49.93		
46.72	50.89		38: 21		
13: 8	26: 15		46.27		
44.41	45.52		38: 23		
13: 9	26: 17		44.69		
42.37	43.36		38: 25		
13: 10	26: 19		43.25		
40.54	41.43		38: 27		
13: 11	26: 21		41.92		
38.89	39.7		38: 29		
13: 12	26: 23		40.68		
37.39	38.12		38: 31		
14: 1	26: 25		39.52		
81.69	36.68		38: 33		
14: 3	27: 1		38.44		
62.67	93.06		38: 35		
14: 5	27: 2		37.42		
53.83	81.06		38: 37		
14: 9	27: 4		36.46		
43.65	69.06				
14: 11	27: 5				
40.18	65.2				
14: 13	27: 7				
37.28	59.37				
15: 1	27: 8				
82.88	57.06				
15: 2	27: 10				
70.88	53.2				
15: 4	27: 11				
58.88	51.55				
15: 7	27: 13				
49.19	48.65				
15: 8	27: 14				
46.88	47.37				
15: 11	27: 16				
41.37	45.06				

15: 13 38.48 15: 14 37.19 16: 1	84	27: 17 44.01 27: 19 42.08 27: 20 41.2 27: 22 39.55 27: 23 38.78 27: 25 37.33 27: 26 36.65				
---	----	--	--	--	--	--

Hieronder hernemen we de lijst, maar nu in volgorde van klimmende toonhoogte, gesorteerd in zes kolommen van elk een oktaaf. Da's uiteraard een stuk handiger wanneer we 'juiste' toonladders willen samenstellen.

1 : 1 36	2 : 1 48	4 : 1 60	8 : 1 72	16 : 1 84	32 : 1 96
48 : 47 36.36 47 : 46 36.37 46 : 45 36.38 45 : 44 36.39 44 : 43 36.4 43 : 42 36.41 42 : 41 36.42 41 : 40 36.43 40 : 39 36.44 39 : 38 36.45 38 : 37 36.46 37 : 36 36.47 36 : 35 36.49 35 : 34 36.5 34 : 33 36.52 33 : 32 36.53 32 : 31 36.55 31 : 30 36.57 30 : 29 36.59 29 : 28 36.61 28 : 27 36.63 27 : 26 36.65 26 : 25 36.68 25 : 24 36.71 24 : 23 36.74 23 : 22 36.77 22 : 21 36.79	47 : 23 48.37 45 : 22 48.39 43 : 21 48.41 41 : 20 48.43 39 : 19 48.45 37 : 18 48.47 35 : 17 48.5 33 : 16 48.53 31 : 15 48.57 29 : 14 48.61 27 : 13 48.65 25 : 12 48.71 48 : 23 48.74 23 : 11 48.77 44 : 21 48.81 21 : 10 48.84 40 : 19 48.89 19 : 9 48.94 36 : 17 48.99 17 : 8 49.05 32 : 15 49.12 47 : 22 49.14 15 : 7 49.19 43 : 20 49.25 28 : 13 49.28 41 : 19 49.32 13 : 6 49.39 37 : 17	45 : 11 60.39 41 : 10 60.43 37 : 9 60.47 33 : 8 60.53 29 : 7 60.61 25 : 6 60.71 46 : 11 60.77 21 : 5 60.84 38 : 9 60.94 17 : 4 61.05 47 : 11 61.14 30 : 7 61.19 43 : 10 61.25 13 : 3 61.39 48 : 11 61.51 35 : 8 61.55 22 : 5 61.65 31 : 7 61.76 40 : 9 61.82 9 : 2 62.04 41 : 9 62.25 32 : 7 62.31 23 : 5 62.42 37 : 8 62.51 14 : 3 62.67 47 : 10 62.79 33 : 7 62.84 19 : 4	41 : 5 72.43 33 : 4 72.53 25 : 3 72.71 42 : 5 72.84 17 : 2 73.05 43 : 5 73.25 26 : 3 73.39 35 : 4 73.55 44 : 5 73.65 9 : 1 74.04 46 : 5 74.42 37 : 4 74.51 28 : 3 74.67 47 : 5 74.79 19 : 2 74.98 48 : 5 75.16 29 : 3 75.28 39 : 4 75.42 10 : 1 75.86 41 : 4 76.29 31 : 3 76.43 21 : 2 76.71 32 : 3 76.98 43 : 4 77.12 11 : 1 77.51 45 : 4 77.9 34 : 3 78.03 23 : 2	33 : 2 84.53 17 : 1 85.05 35 : 2 85.55 18 : 1 86.04 37 : 2 86.51 19 : 1 86.98 39 : 2 87.42 20 : 1 87.86 41 : 2 88.29 21 : 1 88.71 43 : 2 89.12 22 : 1 89.51 45 : 2 89.9 23 : 1 90.28 47 : 2 90.66 24 : 1 91.02 25 : 1 91.73 26 : 1 92.41 27 : 1 93.06 28 : 1 93.69 29 : 1 94.3 30 : 1 94.88 31 : 1 95.45	33 : 1 96.53 34 : 1 97.05 35 : 1 97.55 36 : 1 98.04 37 : 1 98.51 38 : 1 98.98 39 : 1 99.42 40 : 1 99.86 41 : 1 100.29 42 : 1 100.71 43 : 1 101.12 44 : 1 101.51 45 : 1 101.9 46 : 1 102.28 47 : 1 102.66 48 : 1 103.02

22 : 21	49.46	62.98	78.28		
36.81	24 : 11	43 : 9	35 : 3		
43 : 41	49.51	63.08	78.53		
36.82	35 : 16	24 : 5	47 : 4		
21 : 20	49.55	63.16	78.66		
36.84	46 : 21	29 : 6	12 : 1		
41 : 39	49.57	63.28	79.02		
36.87	11 : 5	34 : 7	37 : 3		
20 : 19	49.65	63.36	79.49		
36.89	42 : 19	39 : 8	25 : 2		
39 : 37	49.73	63.42	79.73		
36.91	31 : 14	44 : 9	38 : 3		
19 : 18	49.76	63.47	79.96		
36.94	20 : 9	5 : 1	13 : 1		
37 : 35	49.82	63.86	80.41		
36.96	29 : 13	46 : 9	40 : 3		
18 : 17	49.89	64.24	80.84		
36.99	38 : 17	41 : 8	27 : 2		
35 : 33	49.93	64.29	81.06		
37.02	47 : 21	36 : 7	41 : 3		
17 : 16	49.95	64.35	81.27		
37.05	9 : 4	31 : 6	14 : 1		
33 : 31	50.04	64.43	81.69		
37.08	43 : 19	26 : 5	43 : 3		
16 : 15	50.14	64.54	82.1		
37.12	34 : 15	47 : 9	29 : 2		
47 : 44	50.17	64.62	82.3		
37.14	25 : 11	21 : 4	44 : 3		
31 : 29	50.21	64.71	82.49		
37.15	41 : 18	37 : 7	15 : 1		
46 : 43	50.25	64.83	82.88		
37.17	16 : 7	16 : 3	46 : 3		
15 : 14	50.31	64.98	83.26		
37.19	39 : 17	43 : 8	31 : 2		
44 : 41	50.38	65.12	83.45		
37.22	23 : 10	27 : 5	47 : 3		
29 : 27	50.42	65.2	83.64		
37.24	30 : 13	38 : 7			
43 : 40	50.48	65.29			
37.25	37 : 16	11 : 2			
14 : 13	50.51	65.51			
37.28	44 : 19	39 : 7			
41 : 38	50.54	65.74			
37.32	7 : 3	28 : 5			
27 : 25	50.67	65.83			
37.33	47 : 20	45 : 8			
40 : 37	50.79	65.9			
37.35	40 : 17	17 : 3			
13 : 12	50.81	66.03			
37.39	33 : 14	40 : 7			
38 : 35	50.84	66.17			
37.42	26 : 11	23 : 4			
25 : 23	50.89	66.28			
37.44	45 : 19	29 : 5			
37 : 34	50.93	66.43			
37.46	19 : 8	35 : 6			
12 : 11	50.98	66.53			
37.51	31 : 13	41 : 7			
47 : 43	51.05	66.6			
37.54	43 : 18	47 : 8			
35 : 32	51.08	66.66			
37.55	12 : 5	6 : 1			
23 : 21	51.16	67.02			
37.57	41 : 17	43 : 7			
34 : 31	51.24	67.43			
45 : 41	29 : 12	37 : 6			
37.61	51.28	67.49			
11 : 10	46 : 19	31 : 5			
37.65	51.31	67.59			
43 : 39	17 : 7	25 : 4			
37.69	51.36	67.73			
32 : 29	39 : 16	44 : 7			
21 : 19	51.42	67.82			
37.73	22 : 9	19 : 3			
31 : 28	51.47	67.96			
37.76	27 : 11	32 : 5			
41 : 37	51.55	68.14			
37.78	32 : 13	45 : 7			
10 : 9	51.59	68.21			
	37 : 15	13 : 2			



37.82		51.63		68.41	
39 : 35		42 : 17		46 : 7	
37.87		51.66		68.59	
29 : 26		47 : 19		33 : 5	
37.89		51.68		68.67	
48 : 43	37.9	5 : 2		20 : 3	
19 : 17		51.86		68.84	
37.93		48 : 19		47 : 7	
47 : 42		52.04		68.97	
37.95		43 : 17		27 : 4	
28 : 25		52.07		69.06	
37.96		38 : 15		34 : 5	
37 : 33		52.09		69.19	
37.98		33 : 13		41 : 6	
46 : 41		52.13		69.27	
37.99		28 : 11		48 : 7	
9 : 8		52.18		69.33	
38.04		23 : 9		7 : 1	
44 : 39		52.24		69.69	
38.09		41 : 16		43 : 6	
35 : 31	38.1	52.29		70.1	
26 : 23		18 : 7		36 : 5	
38.12		52.35		70.18	
43 : 38		31 : 12		29 : 4	
38.14		52.43		70.3	
17 : 15		44 : 17		22 : 3	
38.17		52.46		70.49	
42 : 37		13 : 5		37 : 5	
38.19		52.54		70.65	
25 : 22		47 : 18		15 : 2	
38.21		52.62		70.88	
33 : 29		34 : 13		38 : 5	
38.24		52.64		71.11	
41 : 36		21 : 8		23 : 3	
38.25		52.71		71.26	
8 : 7		29 : 11		31 : 4	
38.31		52.78		71.45	
47 : 41		37 : 14		39 : 5	
38.36		52.83		71.56	
39 : 34		45 : 17		47 : 6	
38.38		52.85		71.64	
31 : 27		8 : 3			
38.39		52.98			
23 : 20		43 : 16			
38.42		53.12			
38 : 33		35 : 13			
38.44		53.15			
15 : 13		27 : 10			
38.48		53.2			
37 : 32		46 : 17			
38.51		53.23			
22 : 19		19 : 7			
38.54		53.29			
29 : 25		30 : 11			
38.57		53.37			
36 : 31		41 : 15			
38.59		53.41			
43 : 37	38.6	11 : 4			
7 : 6		53.51			
38.67		47 : 17			
48 : 41		53.61			
38.73		36 : 13			
41 : 35		53.63			
38.74		25 : 9			
34 : 29		53.69			
38.75		39 : 14			
27 : 23		53.74			
38.78		14 : 5			
47 : 40		53.83			
38.79		45 : 16			
20 : 17		53.9			
38.81		31 : 11			
33 : 28		53.94			
38.84		48 : 17			
46 : 39		53.97			
38.86		17 : 6			
13 : 11		54.03			
38.89		37 : 13			
45 : 38		54.11			
		20 : 7			

38.93		54.17			
32 : 27		43 : 15			
38.94		54.23			
19 : 16		23 : 8			
38.98		54.28			
44 : 37	39	26 : 9			
25 : 21		54.37			
39.02		29 : 10			
31 : 26		54.43			
39.05		32 : 11			
37 : 31		54.49			
39.06		35 : 12			
43 : 36		54.53			
39.08		38 : 13			
6 : 5		54.57			
39.16		41 : 14			
47 : 39		54.6			
39.23		44 : 15			
41 : 34		54.63			
39.24		47 : 16			
35 : 29		54.66			
39.26		3 : 1			
29 : 24		55.02			
39.28		46 : 15			
23 : 19		55.4			
39.31		43 : 14			
40 : 33		55.43			
39.33		40 : 13			
17 : 14		55.46			
39.36		37 : 12			
45 : 37		55.49			
39.39		34 : 11			
28 : 23		55.54			
39.41		31 : 10			
39 : 32		55.59			
39.42		28 : 9			
11 : 9		55.65			
39.47		25 : 8			
38 : 31		55.73			
39.52		47 : 15			
27 : 22		55.77			
39.55		22 : 7			
43 : 35		55.82			
39.56		41 : 13			
16 : 13		55.89			
39.59		19 : 6			
37 : 30		55.96			
39.63		35 : 11			
21 : 17		56.04			
39.66		16 : 5			
47 : 38		56.14			
39.68		45 : 14			
26 : 21	39.7	56.21			
31 : 25		29 : 9			
39.72		56.26			
36 : 29		42 : 13			
39.74		56.3			
41 : 33		13 : 4			
39.76		56.41			
46 : 37		36 : 11			
39.77		56.53			
5 : 4		23 : 7			
39.86		56.59			
44 : 35		33 : 10			
39.96		56.67			
39 : 31		43 : 13			
39.97		56.71			
34 : 27		10 : 3			
39.99		56.84			
29 : 23		47 : 14			
40.01		56.97			
24 : 19		37 : 11	57		
40.04		27 : 8			
43 : 34		57.06			
40.07		44 : 13			
19 : 15		57.11			
40.09		17 : 5			
33 : 26		57.19			
40.13		41 : 12			
		57.27			

47 : 37		24 : 7			
40.14		57.33			
14 : 11		31 : 9			
40.18		57.41			
37 : 29		38 : 11			
40.22		57.46			
23 : 18		45 : 13			
40.24		57.5			
32 : 25		7 : 2			
40.27		57.69			
41 : 32		46 : 13			
40.29		57.88			
9 : 7		39 : 11			
40.35		57.91			
40 : 31		32 : 9			
40.41		57.96			
31 : 24		25 : 7			
40.43		58.04			
22 : 17		43 : 12			
40.46		58.1			
35 : 27		18 : 5			
40.49		58.18			
48 : 37		47 : 13			
40.51		58.25			
13 : 10		29 : 8			
40.54		58.3			
43 : 33		40 : 11			
40.58		58.35			
30 : 23	40.6	11 : 3			
47 : 36		58.49			
40.62		48 : 13			
17 : 13		58.61			
40.64		37 : 10			
38 : 29		58.65			
40.68		26 : 7			
21 : 16		58.72			
40.71		41 : 11			
46 : 35		58.78			
40.73		15 : 4			
25 : 19		58.88			
40.75		34 : 9			
29 : 22		59.01			
40.78		19 : 5			
33 : 25		59.11			
40.81		42 : 11			
37 : 28		59.19			
40.83		23 : 6			
41 : 31		59.26			
40.84		27 : 7			
45 : 34		59.37			
40.85		31 : 8			
4 : 3		59.45			
40.98		35 : 9			
47 : 35	41.1	59.51			
43 : 32		39 : 10			
41.12		59.56			
39 : 29		43 : 11			
41.13		59.6			
35 : 26		47 : 12			
41.15		59.64			
31 : 23					
41.17					
27 : 20	41.2				
23 : 17					
41.23					
42 : 31					
41.26					
19 : 14					
41.29					
34 : 25					
41.32					
15 : 11					
41.37					
41 : 30					
41.41					
26 : 19					
41.43					
37 : 27					
41.45					

48 : 35					
41.47					
11 : 8					
41.51					
40 : 29					
41.57					
29 : 21					
41.59					
47 : 34					
41.61					
18 : 13					
41.63					
43 : 31					
41.66					
25 : 18					
41.69					
32 : 23					
41.72					
39 : 28					
41.74					
46 : 33					
41.75					
7 : 5					
41.83					
45 : 32	41.9				
38 : 27					
41.92					
31 : 22					
41.94					
24 : 17					
41.97					
41 : 29					
41.99					
17 : 12					
42.03					
44 : 31					
42.06					
27 : 19					
42.08					
37 : 26					
42.11					
47 : 33					
42.12					
10 : 7					
42.17					
43 : 30					
42.23					
33 : 23					
42.25					
23 : 16					
42.28					
36 : 25					
42.31					
13 : 9					
42.37					
42 : 29					
42.41					
29 : 20					
42.43					
45 : 31					
42.45					
16 : 11					
42.49					
35 : 24					
42.53					
19 : 13					
42.57					
41 : 28	42.6				
22 : 15					
42.63					
47 : 32					
42.66					
25 : 17					
42.68					
28 : 19					
42.71					
31 : 21					
42.74					
34 : 23					

42.77					
37 : 25					
42.79					
40 : 27	42.8				
43 : 29					
42.82					
46 : 31					
42.83					
3 : 2					
43.02					
47 : 31	43.2				
44 : 29					
43.22					
41 : 27					
43.23					
38 : 25					
43.25					
35 : 23					
43.27					
32 : 21					
43.29					
29 : 19					
43.32					
26 : 17					
43.36					
23 : 15	43.4				
43 : 28					
43.43					
20 : 13					
43.46					
37 : 24					
43.49					
17 : 11					
43.54					
48 : 31					
43.57					
31 : 20					
43.59					
45 : 29					
43.61					
14 : 9					
43.65					
39 : 25	43.7				
25 : 16					
43.73					
36 : 23					
43.76					
47 : 30					
43.77					
11 : 7					
43.82					
41 : 26					
43.89					
30 : 19					
43.91					
19 : 12					
43.96					
46 : 29					
43.99					
27 : 17					
44.01					
35 : 22					
44.04					
43 : 27					
44.06					
8 : 5					
44.14					
45 : 28					
44.21					
37 : 23					
44.23					
29 : 18					
44.26					
21 : 13	44.3				
34 : 21					
44.34					
47 : 29					
44.36					
13 : 8					

44.41					
44 : 27					
44.45					
31 : 19					
44.48					
18 : 11					
44.53					
41 : 25					
44.56					
23 : 14					
44.59					
28 : 17					
44.64					
33 : 20					
44.67					
38 : 23					
44.69					
43 : 26					
44.71					
48 : 29					
44.72					
5 : 3					
44.84					
47 : 28					
44.97					
42 : 25					
44.98					
37 : 22	45				
32 : 19					
45.02					
27 : 16					
45.06					
22 : 13					
45.11					
39 : 23					
45.14					
17 : 10					
45.19					
46 : 27					
45.22					
29 : 17					
45.25					
41 : 24					
45.27					
12 : 7					
45.33					
43 : 25					
45.39					
31 : 18					
45.41					
19 : 11					
45.46					
45 : 26	45.5				
26 : 15					
45.52					
33 : 19					
45.56					
40 : 23					
45.58					
47 : 27	45.6				
7 : 4					
45.69					
44 : 25					
45.79					
37 : 21					
45.81					
30 : 17					
45.83					
23 : 13					
45.88					
39 : 22					
45.91					
16 : 9					
45.96					
41 : 23					
46.01					
25 : 14					
46.04					
34 : 19					

46.07					
43 : 24	46.1				
9 : 5					
46.18					
47 : 26					
46.25					
38 : 21					
46.27					
29 : 16	46.3				
20 : 11					
46.35					
31 : 17	46.4				
42 : 23					
46.43					
11 : 6					
46.49					
46 : 25					
46.56					
35 : 19					
46.58					
24 : 13					
46.61					
37 : 20					
46.65					
13 : 7					
46.72					
41 : 22					
46.78					
28 : 15					
46.81					
43 : 23					
46.83					
15 : 8					
46.88					
47 : 25					
46.93					
32 : 17					
46.95					
17 : 9					
47.01					
36 : 19					
47.06					
19 : 10					
47.11					
40 : 21					
47.16					
21 : 11					
47.19					
44 : 23					
47.23					
23 : 12					
47.26					
48 : 25					
47.29					
25 : 13					
47.32					
27 : 14					
47.37					
29 : 15					
47.41					
31 : 16					
47.45					
33 : 17					
47.48					
35 : 18					
47.51					
37 : 19					
47.54					
39 : 20					
47.56					
41 : 21					
47.58					
43 : 22	47.6				
45 : 23					
47.62					
47 : 24					
47.64					

Bij wijze van voorbeeld, hierbij een van de vele mogelijke selecties, gegrepen uit bovenstaande tabellen, voor een juiste-boventoons kwarttoons stemming, met 24 noten per oktaaf:

1:1	35:34	18:17	12:11	9:8	15:13	19:16	11:9	29:23	13:10	4:3	11:8	17:12	16:11	3:2	17:11	27:17	18:11	32:19	19:11	16:9	11:6	17:9
36.00	36.50	36.99	37.51	38.04	38.48	38.98	39.47	40.01	40.54	40.98	41.51	42.03	42.49	43.02	43.54	44.01	44.53	45.02	45.46	45.96	46.49	47.01

Deze selectie benadert erg dicht de gelijkzwevende kwarttoonsstemming die we eerder al berekenden. Ze heeft iets onestetisch, omdat ze gebruik maakt van een erg groot aantal kwalitatief verschillende intervallen.

---

Heel wat van de muziek geschreven voor de 19e eeuw, en zeker voor de 18e eeuw uit onze cultuur is geschreven om te worden gespeeld in een of andere niet-gelijkzwevende stemming.. Het eigen klankkarakter dat werd toegeschreven aan de verschillende toonaarden en modi, is geheel en al op rekening te schrijven van het gebruik van niet-gelijkzwevende stemmen. We gaan daar hier niet verder op in omdat het deel uitmaakt van elke goede cursus muziekgeschiedenis.

Merken we terloops nog op dat de gelijkzwevende stemming helemaal geen westerse uitvinding is, maar door de Chinezen werd ontwikkeld en ingevoerd in 1596, ongeveer een eeuw vooraleer dat bij ons het geval was. De systematisering van de gelijkzwevende stemming wordt toegeschreven aan Chu Tsai-Yu in de Ming dynastie (1368-1643). [cfr. M.Honegger, 'Science de la musique...', Bordas, Paris, 1976]

Niet gelijkzwevende stemmen hebben ook in de twintigste eeuw heel wat voorvechters gekend: Harry Partch (die er zijn eigen instrumenten voor ontwikkelde), La Monte Young, Lou Harisson, Yvor Darregg, James Tenney, vele van de Californische komponisten uit de tweede helft van de twintigste eeuw. The Just Intonation Network is een organisatie die poogt alle komponisten die zich keren tegen de diktatuur van de twaalfde machtwortel uit twee, te verenigen. Het zal niemand verbazen dat heel wat van deze komponisten zich toeleggen op elektronische muziek: daarbinnen immers stelt het probleem van instrumentarium en speeltechniek zich nauwelijks.

---

## 'Real World' stemmen en temperamenten...

---

In de vorige paragraaf toonden en bespraken we de fundamente van niet gelijkzwevende stemmen. We noemden ze Platonisch. Bij zulke stemmen wordt steeds uitgegaan van een uitsluitend op een ideale werkelijkheid (een geloof) gesteund rekensysteem waarbinnen geen rekening gehouden wordt met de wetten van de fysika. Platonische in algemene, of pythagoreische in specifieke zin toonsystemen kunnen alleen enige betekenis hebben in een volstrekt 1-dimensioneel model van de werkelijkheid.. Ze zijn alleen denkbaar voor snaren zonder dikte noch massa, voor luchtkolommen zonder diameter en lucht zonder molekulen...

Geen enkel in de werkelijkheid bestaand objekt kan trillen en een boventoonreeks produceren die zich als een reeks gehele getallen verhoudt tot de grondtoon. Om die reden heeft ook geen enkele van de op konservatoria onderwezen 'harmonieleer'-varianten ook maar de geringste aanspraak op een fundament in de werkelijkheid noch in de fysika noch in de wetenschap in het algemeen. Ze is hooguit een deel van de theologie.

De trilling van een snaar van vlees-en-bloed kan alleen met een vierde graads differentiaal vergelijking benaderend worden beschreven. Het waarom daarvan behandelen we in onze cursus akoestiek. Deze feitelijkheid heeft natuurlijk enorme konsekwenties voor wie zich op spektra wil beroepen om een toonsysteem op te bouwen of te funderen.



Wanneer we de werkelijke spektrale reeks voor een werkelijke snaar berekenen zonder onverantwoord vergaande simplificaties, dan blijkt dat spectrum niet alleen een functie te zijn van de snaardikte, maar al evenzeer van de frekwentie zelf waarop die snaar gestemd wordt. De konsekwentie daarvan is dat het spectrum van elke snaar van een piano, bij wijze van voorbeeld, verschillend is. Bovendien blijkt dat het spectrum van een en dezelfde snaar veranderd naarmate we die snaar op een andere toon stemmen.

We voerden de berekening van de boventonen in het spectrum bij wijze van voorbeeld uit voor een nietomwikkelde piano snaar gestemd op Do (36). Ook nu nog maakten we enkele vereenvoudigingen:

- we beschouwen de snaar als vrij trillend: dit wil zeggen, niet aangedreven door een strijkstok, plektrum of hamer
- we beschouwen het spectrum als continu (dus onder weglating van de omhullende in de tijd)
- we beschouwen niet de kleine ontstemming op het moment van en onmiddellijk na de botsing met de hamer
- we beschouwen niet het spectrum van de torsie-komponent die nochtans steeds aanwezig is en een heel lage grondfrekwentie heeft.
- we beschouwen niet de terugkoppeling op de trilwijze veroorzaakt door de klankkast en externe resonatoren
- we beschouwen de snaarspektra los van de absolute amplitude. Nochtans heeft de amplitude onmiskenbare invloed op de klankkleur.
- we beschouwen de snaren als homogeen, wat nochtans voor de omwikkelde snaren in sommige instrumenten niet het geval is.
- we laten de longitudinale trillingsmodus van de snaar volledig buiten beschouwing

Wiskundig sluitende modellen voor het geheel van bovenstaande parameters bestaan voorzover wij weten, tot op heden niet. Wel weten we dat op grond van de vele vrijheidsgraden en parameters, we te maken zouden krijgen met een ingewikkeld stelsel van hogere orde differentiaalvergelijkingen. Om die reden kunnen er dan ook geen synthesizers bestaan die een 'goed' pianogeluid (niet van 'echt' te onderscheiden, bedoelen we dan) voortbrengen. De betere synthesizers proberen zelfs niet te 'synthesizen' maar maken gebruik van een sample-bank en reproduceren dus in werkelijkheid het geluid van echte opgenomen pianoklanken.

Parameters voor de volgende berekening:

Basisfrekwentie  $f(0) = 65.4064$  Hz = Fractional note: 36

Berekend voor een snaarfaktor  $B = 3.333333E-4$  (geldig voor de korresponderende snaar van een buffetpiano of kleine vleugel).

Formule:  $f(n) = n \cdot f(0) \cdot \text{SQR}(1 + B \cdot n^2)$ , voor  $n \geq 1$ , in gehele getallen

Voor een snaar met dikte 0 is  $B=0$  en krijgen we de hiervoor behandelde 'platonische' boventoonreeks.

$B = E \cdot \mu \cdot (\pi \cdot r)^2 / (4 \cdot p \cdot T \cdot (L^2))$  waarin

- E = Youngs modulus voor het snaarmateriaal
- $\mu$  = massa per lengteenheid voor het snaarmateriaal
- $\pi = 3.14\dots$
- r = straal van de snaar (halve diameter)
- p = densiteit van het materiaal
- T = snaarspanning
- L = snaarlengte

Boventoon-nummer, reele toonhoogte, 'platonische' toonhoogte, verschil in cent, verschil in Hz

Partial nr.: 1	real partial note: 36	Platonic Harmonic: 36	Dif= 0 cents	Dif= .01 Hz
Partial nr.: 2	real partial note: 48.01	Platonic Harmonic: 48	Dif= 1 cents	Dif= .09 Hz

Partial nr.: 3	real partial note: 55.05	Platonic Harmonic: 55.02	Dif= 3 cents Dif= .29 Hz
Partial nr.: 4	real partial note: 60.05	Platonic Harmonic: 60	Dif= 5 cents Dif= .7 Hz
Partial nr.: 5	real partial note: 63.93	Platonic Harmonic: 63.86	Dif= 7 cents Dif= 1.36 Hz
Partial nr.: 6	real partial note: 67.12	Platonic Harmonic: 67.02	Dif= 10 cents Dif= 2.35 Hz
Partial nr.: 7	real partial note: 69.83	Platonic Harmonic: 69.69	Dif= 14 cents Dif= 3.72 Hz
Partial nr.: 8	real partial note: 72.18	Platonic Harmonic: 72	Dif= 18 cents Dif= 5.55 Hz
Partial nr.: 9	real partial note: 74.27	Platonic Harmonic: 74.04	Dif= 23 cents Dif= 7.89 Hz
Partial nr.: 10	real partial note: 76.15	Platonic Harmonic: 75.86	Dif= 28 cents Dif= 10.81 Hz
Partial nr.: 11	real partial note: 77.86	Platonic Harmonic: 77.51	Dif= 34 cents Dif= 14.37 Hz
Partial nr.: 12	real partial note: 79.43	Platonic Harmonic: 79.02	Dif= 41 cents Dif= 18.62 Hz
Partial nr.: 13	real partial note: 80.88	Platonic Harmonic: 80.41	Dif= 47 cents Dif= 23.62 Hz
Partial nr.: 14	real partial note: 82.24	Platonic Harmonic: 81.69	Dif= 55 cents Dif= 29.44 Hz
Partial nr.: 15	real partial note: 83.51	Platonic Harmonic: 82.88	Dif= 63 cents Dif= 36.13 Hz
Partial nr.: 16	real partial note: 84.71	Platonic Harmonic: 84	Dif= 71 cents Dif= 43.74 Hz
Partial nr.: 17	real partial note: 85.85	Platonic Harmonic: 85.05	Dif= 80 cents Dif= 52.33 Hz
Partial nr.: 18	real partial note: 86.93	Platonic Harmonic: 86.04	Dif= 89 cents Dif= 61.95 Hz
Partial nr.: 19	real partial note: 87.96	Platonic Harmonic: 86.98	Dif= 98 cents Dif= 72.65 Hz
Partial nr.: 20	real partial note: 88.95	Platonic Harmonic: 87.86	Dif= 108 cents Dif= 84.48 Hz
Partial nr.: 21	real partial note: 89.9	Platonic Harmonic: 88.71	Dif= 119 cents Dif= 97.49 Hz
Partial nr.: 22	real partial note: 90.81	Platonic Harmonic: 89.51	Dif= 129 cents Dif= 111.74 Hz
Partial nr.: 23	real partial note: 91.69	Platonic Harmonic: 90.28	Dif= 141 cents Dif= 127.25 Hz
Partial nr.: 24	real partial note: 92.54	Platonic Harmonic: 91.02	Dif= 152 cents Dif= 144.08 Hz
Partial nr.: 25	real partial note: 93.36	Platonic Harmonic: 91.73	Dif= 164 cents Dif= 162.28 Hz
Partial nr.: 26	real partial note: 94.16	Platonic Harmonic: 92.41	Dif= 176 cents Dif= 181.87 Hz
Partial nr.: 27	real partial note: 94.94	Platonic Harmonic: 93.06	Dif= 188 cents Dif= 202.91 Hz
Partial nr.: 28	real partial note: 95.7	Platonic Harmonic: 93.69	Dif= 201 cents Dif= 225.43 Hz
Partial nr.: 29	real partial note: 96.43	Platonic Harmonic: 94.3	Dif= 214 cents Dif= 249.46 Hz
Partial nr.: 30	real partial note: 97.15	Platonic Harmonic: 94.88	Dif= 227 cents Dif= 275.05 Hz
Partial nr.: 31	real partial note: 97.86	Platonic Harmonic: 95.45	Dif= 241 cents Dif= 302.23 Hz
Partial nr.: 32	real partial note: 98.54	Platonic Harmonic: 96	Dif= 254 cents Dif= 331.03 Hz
Partial nr.: 33	real partial note: 99.21	Platonic Harmonic: 96.53	Dif= 268 cents Dif= 361.48 Hz
Partial nr.: 34	real partial note: 99.87	Platonic Harmonic: 97.05	Dif= 282 cents Dif= 393.62 Hz
Partial nr.: 35	real partial note: 100.52	Platonic Harmonic: 97.55	Dif= 296 cents Dif= 427.47 Hz
Partial nr.: 36	real partial note: 101.15	Platonic Harmonic: 98.04	Dif= 311 cents Dif= 463.07 Hz
Partial nr.: 37	real partial note: 101.77	Platonic Harmonic: 98.51	Dif= 325 cents Dif= 500.43 Hz
Partial nr.: 38	real partial note: 102.38	Platonic Harmonic: 98.98	Dif= 340 cents Dif= 539.59 Hz
Partial nr.: 39	real partial note: 102.97	Platonic Harmonic: 99.42	Dif= 355 cents Dif= 580.57 Hz
Partial nr.: 40	real partial note: 103.56	Platonic Harmonic: 99.86	Dif= 370 cents Dif= 623.4 Hz
Partial nr.: 41	real partial note: 104.14	Platonic Harmonic: 100.29	Dif= 385 cents Dif= 668.09 Hz
Partial nr.: 42	real partial note: 104.71	Platonic Harmonic: 100.71	Dif= 400 cents Dif= 714.67 Hz
Partial nr.: 43	real partial note: 105.27	Platonic Harmonic: 101.12	Dif= 416 cents Dif= 763.17 Hz
Partial nr.: 44	real partial note: 105.82	Platonic Harmonic: 101.51	Dif= 431 cents Dif= 813.59 Hz
Partial nr.: 45	real partial note: 106.37	Platonic Harmonic: 101.9	Dif= 446 cents Dif= 865.97 Hz
Partial nr.: 46	real partial note: 106.9	Platonic Harmonic: 102.28	Dif= 462 cents Dif= 920.31 Hz
Partial nr.: 47	real partial note: 107.43	Platonic Harmonic: 102.66	Dif= 478 cents Dif= 976.64 Hz
Partial nr.: 48	real partial note: 107.95	Platonic Harmonic: 103.02	Dif= 493 cents Dif= 1034.98 Hz
Partial nr.: 49	real partial note: 108.47	Platonic Harmonic: 103.38	Dif= 509 cents Dif= 1095.33 Hz
Partial nr.: 50	real partial note: 108.97	Platonic Harmonic: 103.73	Dif= 525 cents Dif= 1157.71 Hz
Partial nr.: 51	real partial note: 109.47	Platonic Harmonic: 104.07	Dif= 540 cents Dif= 1222.15 Hz
Partial nr.: 52	real partial note: 109.97	Platonic Harmonic: 104.41	Dif= 556 cents Dif= 1288.65 Hz
Partial nr.: 53	real partial note: 110.46	Platonic Harmonic: 104.74	Dif= 572 cents Dif= 1357.23 Hz
Partial nr.: 54	real partial note: 110.94	Platonic Harmonic: 105.06	Dif= 588 cents Dif= 1427.89 Hz
Partial nr.: 55	real partial note: 111.41	Platonic Harmonic: 105.38	Dif= 604 cents Dif= 1500.66 Hz
Partial nr.: 56	real partial note: 111.88	Platonic Harmonic: 105.69	Dif= 619 cents Dif= 1575.54 Hz
Partial nr.: 57	real partial note: 112.35	Platonic Harmonic: 105.99	Dif= 635 cents Dif= 1652.55 Hz
Partial nr.: 58	real partial note: 112.81	Platonic Harmonic: 106.3	Dif= 651 cents Dif= 1731.69 Hz
Partial nr.: 59	real partial note: 113.26	Platonic Harmonic: 106.59	Dif= 667 cents Dif= 1812.98 Hz
Partial nr.: 60	real partial note: 113.71	Platonic Harmonic: 106.88	Dif= 683 cents Dif= 1896.42 Hz
Partial nr.: 61	real partial note: 114.15	Platonic Harmonic: 107.17	Dif= 698 cents Dif= 1982.03 Hz
Partial nr.: 62	real partial note: 114.59	Platonic Harmonic: 107.45	Dif= 714 cents Dif= 2069.81 Hz
Partial nr.: 63	real partial note: 115.02	Platonic Harmonic: 107.73	Dif= 730 cents Dif= 2159.77 Hz
Partial nr.: 64	real partial note: 115.45	Platonic Harmonic: 108	Dif= 745 cents Dif= 2251.92 Hz
Partial nr.: 65	real partial note: 115.88	Platonic Harmonic: 108.27	Dif= 761 cents Dif= 2346.27 Hz
Partial nr.: 66	real partial note: 116.3	Platonic Harmonic: 108.53	Dif= 776 cents Dif= 2442.83 Hz
Partial nr.: 67	real partial note: 116.71	Platonic Harmonic: 108.79	Dif= 792 cents Dif= 2541.6 Hz
Partial nr.: 68	real partial note: 117.12	Platonic Harmonic: 109.05	Dif= 807 cents Dif= 2642.59 Hz
Partial nr.: 69	real partial note: 117.53	Platonic Harmonic: 109.3	Dif= 823 cents Dif= 2745.8 Hz
Partial nr.: 70	real partial note: 117.93	Platonic Harmonic: 109.55	Dif= 838 cents Dif= 2851.25 Hz
Partial nr.: 71	real partial note: 118.33	Platonic Harmonic: 109.8	Dif= 853 cents Dif= 2958.94 Hz
Partial nr.: 72	real partial note: 118.73	Platonic Harmonic: 110.04	Dif= 869 cents Dif= 3068.86 Hz
Partial nr.: 73	real partial note: 119.12	Platonic Harmonic: 110.28	Dif= 884 cents Dif= 3181.04 Hz
Partial nr.: 74	real partial note: 119.5	Platonic Harmonic: 110.51	Dif= 899 cents Dif= 3295.47 Hz
Partial nr.: 75	real partial note: 119.89	Platonic Harmonic: 110.75	Dif= 914 cents Dif= 3412.17 Hz
Partial nr.: 76	real partial note: 120.27	Platonic Harmonic: 110.98	Dif= 929 cents Dif= 3531.12 Hz

De spektraaltonen zijn allemaal een beetje tot een heel stuk groter dan het platonische model zou laten uitschijnen. Bij de veertiende boventoon, belooft het verschil al meer dan een kwarttoon. De negentiende bovendien, zit al een halve toon 'fout'. Bij de 61-ste bovendien belooft het verschil al een kwint... De waarneembaarheid van deze wel erg hoge boventonen is evenwel betwifelbaar. Immers de amplitude van de spektraalkomponenten neemt af volgens een voor elke spektraaltoon eigen omhullende, globaal echter evenredig met hun rangorde. Praktisch gesproken kunnen we voor vrij klinkende snaren alle spektraalkomponenten met een rangnummer groter dan 20 buiten beschouwing laten, wegens beneden de gehoordrempel. (Memo: voor aangeslagen snaren vormen de amplitudes van de boventonen een reeks van de vorm  $1, 1/2, 1/3, 1/3, 1/4, \dots, 1/n$ . Voor getokkelde snaren heeft de reeks de vorm:  $1, 1/2^2, 1/3^2, 1/4^2, 1/5^2, \dots, 1/n^2$ . cfr: [4040.html](http://4040.html)).

Een goede verstaander zal het intussen al doorhebben: Indien we een stemming zouden willen steunen op de werkelijke boventonen van werkelijke snaren dan zal dat onmogelijk blijken omdat elke snaar nu

eenmaal een ander spektrum zal hebben. Zelfs een stemming berekend voor een instrument met 1 enkele snaar en fretten voor de verschillende toonhoogtes kan niet toonsysteem-konsistent gebouwd en berekend worden. Sterker nog, gesteld dat we het waanzinnige idee in ons hoofd zouden halen om verschillende instrumenten, snaarinstrumenten enerzijds en instrumenten gesteund op trillende luchtkolommen anderzijds, samen te laten spelen, dan worden we onherroepelijk geconfronteerd met het akoestische feit dat voor trillende luchtkolommen evenzeer geldt wat we stelden in verband met de inharmonicititeit van snaren, maar dan... in omgekeerde richting: de spektraalkomponenten blijken hier systematisch een beetje te klein te zijn. Zelfs een gewoon unisono wordt onmogelijk...

Maar, we kunnen deze verschikkelijke ellende ook in ons voordeel laten uitdraaien: precies omdat de spektra van reelee instrumenten niet alleen inharmonisch zijn, maar bovendien volkomen inkongruent, zijn wij audioperceptorisch in staat de diverse geluidsbronnen in het bonte mengsel dat een orkest wordt genoemd, te onderscheiden. Het is precies in en dankzij de anarchie van de klinkende werkelijkheid, dat de individuele stem hoorbaar kan worden.

Een verdere konsekwentie van de wetenschappelijke akoestiek is dat alle 'juiste boventoons' stemmingen in hun grondvesten naar het rijk der fabeltjes worden verwezen. Gelijkzwevende stemmingen -het aantal verdelingen per oktaaf doet er hier verder niet toe- vormen een heel goed kompromis wanneer we snaren en windinstrumenten samen willen laten spelen.

Wanneer we evenwel grotendeels aan beide verzaken, en bijvoorbeeld orkesten samenstellen met hoofdzakelijk twee- en drie-dimensioneel trillende voorwerpen (gongs, potgongs, bellen, platen, staven...) dan komen we inzake toonsystemen en stemmingen alweer in een geheel andere wereld terecht. De javaanse en balinese gamelan-kultuur heeft inderdaad een toonsysteem tot ontwikkeling gebracht, dat voor een groot stuk kan worden verklaard op grond van het gebruikte instrumentarium. Vergeten we immers niet dat de spektra van trillende platen en membranen in verste verte geen kwinten en oktaven bevatten! Gamelan orkesten worden gestemd en geintoneerd op grond van de boventonen van hun grootste gongs. Elk gamelan orkest heeft dan ook een eigen intonatie en de instrumenten van de ene gamelan zijn niet zonder meer uitwisselbaar voor die van een ander.

Voor wie na het na het bovenstaande nog niet zou beginnen te dagen, hebben we ook een berekening gemaakt voor het spektrum van een lage omwikkelde snaar in een kleine vleugel of buffetpiano.

Basisfrequentie:= 65.4064 Hz = Fractional note: 36 Berekend voor een snaarfaktor B= 5.694346E-3, overeenkomend met volgende realistische snaareigenschappen:

- snaardiameter: 2.75 mm
- kracht: 850 N
- Lengte = 107 cm
- Elasticiteitsmodulus: 2E11
- densiteit: 7.3 kg/dm<sup>3</sup>

Partial nr.: 1	real partial note: 36.00	Plato-Harmonic: 36	Dif= 0 cent	Dif= 0 Hz
Partial nr.: 2	real partial note: 48.19	Plato-Harmonic: 48	Dif= 19 cent	Dif= 1.48 Hz
Partial nr.: 3	real partial note: 55.45	Plato-Harmonic: 55.02	Dif= 43 cent	Dif= 4.97 Hz
Partial nr.: 4	real partial note: 60.75	Plato-Harmonic: 60	Dif= 75 cent	Dif= 11.66 Hz
Partial nr.: 5	real partial note: 65.02	Plato-Harmonic: 63.86	Dif= 115 cent	Dif= 22.5 Hz
Partial nr.: 6	real partial note: 68.63	Plato-Harmonic: 67.02	Dif= 161 cent	Dif= 38.35 Hz
Partial nr.: 7	real partial note: 71.82	Plato-Harmonic: 69.69	Dif= 213 cent	Dif= 59.95 Hz
Partial nr.: 8	real partial note: 74.69	Plato-Harmonic: 72	Dif= 269 cent	Dif= 87.95 Hz
Partial nr.: 9	real partial note: 77.32	Plato-Harmonic: 74.04	Dif= 328 cent	Dif= 122.92 Hz
Partial nr.: 10	real partial note: 79.76	Plato-Harmonic: 75.86	Dif= 390 cent	Dif= 165.33 Hz
Partial nr.: 11	real partial note: 82.05	Plato-Harmonic: 77.51	Dif= 454 cent	Dif= 215.57 Hz
Partial nr.: 12	real partial note: 84.2	Plato-Harmonic: 79.02	Dif= 518 cent	Dif= 273.98 Hz
Partial nr.: 13	real partial note: 86.24	Plato-Harmonic: 80.41	Dif= 584 cent	Dif= 340.83 Hz
Partial nr.: 14	real partial note: 88.18	Plato-Harmonic: 81.69	Dif= 649 cent	Dif= 416.35 Hz
Partial nr.: 15	real partial note: 90.02	Plato-Harmonic: 82.88	Dif= 714 cent	Dif= 500.73 Hz
Partial nr.: 16	real partial note: 91.78	Plato-Harmonic: 84	Dif= 778 cent	Dif= 594.12 Hz
Partial nr.: 17	real partial note: 93.47	Plato-Harmonic: 85.05	Dif= 842 cent	Dif= 696.67 Hz
Partial nr.: 18	real partial note: 95.09	Plato-Harmonic: 86.04	Dif= 905 cent	Dif= 808.47 Hz
Partial nr.: 19	real partial note: 96.64	Plato-Harmonic: 86.98	Dif= 967 cent	Dif= 929.61 Hz
Partial nr.: 20	real partial note: 98.14	Plato-Harmonic: 87.86	Dif= 1028 cent	Dif= 1060.18 Hz
Partial nr.: 21	real partial note: 99.58	Plato-Harmonic: 88.71	Dif= 1087 cent	Dif= 1200.22 Hz
Partial nr.: 22	real partial note: 100.97	Plato-Harmonic: 89.51	Dif= 1146 cent	Dif= 1349.81 Hz

Partial nr.: 23	real partial note: 102.31	Plato-Harmonic: 90.28	Dif= 1203	cent	Dif= 1508.97	Hz
Partial nr.: 24	real partial note: 103.61	Plato-Harmonic: 91.02	Dif= 1259	cent	Dif= 1677.76	Hz
Partial nr.: 25	real partial note: 104.86	Plato-Harmonic: 91.73	Dif= 1313	cent	Dif= 1856.19	Hz
Partial nr.: 26	real partial note: 106.07	Plato-Harmonic: 92.41	Dif= 1367	cent	Dif= 2044.3	Hz
Partial nr.: 27	real partial note: 107.25	Plato-Harmonic: 93.06	Dif= 1419	cent	Dif= 2242.12	Hz
Partial nr.: 28	real partial note: 108.39	Plato-Harmonic: 93.69	Dif= 1470	cent	Dif= 2449.65	Hz
Partial nr.: 29	real partial note: 109.5	Plato-Harmonic: 94.3	Dif= 1520	cent	Dif= 2666.92	Hz
Partial nr.: 30	real partial note: 110.57	Plato-Harmonic: 94.88	Dif= 1569	cent	Dif= 2893.95	Hz
Partial nr.: 31	real partial note: 111.62	Plato-Harmonic: 95.45	Dif= 1617	cent	Dif= 3130.74	Hz
Partial nr.: 32	real partial note: 112.63	Plato-Harmonic: 96	Dif= 1663	cent	Dif= 3377.31	Hz
Partial nr.: 33	real partial note: 113.62	Plato-Harmonic: 96.53	Dif= 1709	cent	Dif= 3633.67	Hz
Partial nr.: 34	real partial note: 114.59	Plato-Harmonic: 97.05	Dif= 1754	cent	Dif= 3899.83	Hz
Partial nr.: 35	real partial note: 115.52	Plato-Harmonic: 97.55	Dif= 1797	cent	Dif= 4175.79	Hz
Partial nr.: 36	real partial note: 116.44	Plato-Harmonic: 98.04	Dif= 1840	cent	Dif= 4461.56	Hz
Partial nr.: 37	real partial note: 117.33	Plato-Harmonic: 98.51	Dif= 1882	cent	Dif= 4757.14	Hz
Partial nr.: 38	real partial note: 118.21	Plato-Harmonic: 98.98	Dif= 1923	cent	Dif= 5062.55	Hz
Partial nr.: 39	real partial note: 119.06	Plato-Harmonic: 99.42	Dif= 1963	cent	Dif= 5377.78	Hz
Partial nr.: 40	real partial note: 119.89	Plato-Harmonic: 99.86	Dif= 2003	cent	Dif= 5702.84	Hz
Partial nr.: 41	real partial note: 120.7	Plato-Harmonic: 100.29	Dif= 2041	cent	Dif= 6037.74	Hz

De resultaten mogen in dit geval zeker spectaculair worden genoemd. Zelfs de eerste boventoon, het oktaaf vertoont nu reeds twee zwevingen. Dit verschijnsel ligt trouwens aan de basis van het door alle goede pianostemmers toegepaste 'ecartement': de vergroting van de oktaven in de lage bassen en bij de extreme hoogten.

De wetenschappelijke eerlijkheid en ernst verplicht er ons, naar aanleiding van bovenstaande berekening, toch volgende opmerkingen te maken:

- we maakten abstraktie van het feit dat deze snaar omwikkeld is, waardoor zij eigenlijk niet als homogeen kan worden beschouwd. De densiteit (die we hier gelijk stelden aan die voor staal) zou dan ook beter bepaald worden als gemiddelde tussen koper en staal in de verhouding van de respectievelijke volumes. Ze zal in elk geval hoger komen te liggen. De inharmonisiteit zal hierdoor eerder nog wat toenemen.
- de omwikkeling met koper is lateraal over de stalen kern heen: hierdoor wordt de snaar elastischer en veranderd de elasticiteitsmodulus. Exakte waarden zijn ons evenwel niet bekend. Dit gegeven kan in mindering gebracht worden van de inharmonisiteit.
- de snaar is aan de uiteinden niet omwikkeld: de doorsnede is dus niet konstant over de lengte. Dit brachten we niet in rekening, maar zeker is wel dat dit de inharmonisiteit nog vergroot..

## 'Wohltemperiert' - 'well tempered'

### Parentesis

Tot de gelijkzwevende stemming in de west europese muziek algemeen ingang vond, kende onze muziekkultuur een veelheid aan verschillende stemmingen en toonsystemen. In de tijd van J.S.Bach vond de term 'wohltemperiert' ingang. De term verwijst niet -voorzover men heeft kunnen nagaan- naar een welgedefinieerd stemmingssysteem, maar wel naar een principe dat toen ingang vond en dat erop neerkomt dat men de problemen van elke juiste boventoonsstemming van zodra men gaat moduleren, poogt te ondervangen door de fout van de komma, te verspreiden over een aantal intervallen.

Een gangbaar systeem (maar er zijn er teveel om op te noemen of hier te behandelen) om dit te doen gaat als volgt:

[berekening overgenomen uit: Philippe Guillaume, Music and Acoustics, ISTE, London 2006]

Uitgaand van de centrale Do, gaan we door een cyclus van 4 identieke kwinten: do-sol-re-la-mi die we elk zo stemmen dat ze een beetje te laag staan en wel zodanig dat het aantal zwevingen van do-sol gelijk is aan dat van de tert do-mi, die dan een zweving te hoog gestemd moet worden.

Noemen we x de gebruikte verhouding voor de kwint, en f de frekwentie voor onze do dan kunnen we stellen:

zweving van de terts do-mi:  $b_1 = |(5-4x^2/4)| * f = ((x^4) - 5) * f$

zweving van de kwint do-sol:  $b_2 = |(3-(2*x))| * f = (3-(2*x)) * f$

als nu  $b_1 = b_2$  volgens onze konditie (zelfde zweving voor terts en kwint) dan moeten we hebben:

$$(x^4) + (2*x) - 8 = 0$$

een tweede-graads vergelijking met als oplossing  $x = 1.496$

De kwint si- fa# wordt nu volgens deze verhouding gestemd en alle overige kwinten juist in de 3:2 verhouding. De oktaven worden zwevingsvrij gestemd, wat mogelijk is omdat:

$$(x^5) * (3/2)^7 = 128.006, \text{ dus kwazi } 128.$$

Het resultaat is een stemming waarin alle grote tertsen iets verschillend zijn en telkens in geringe mate afwijken van de juiste boventoonsterts. Naarmate we van do-groot gaan wegmoduleren of transponeren, veranderen onze tertsen dus weg van het boventoonsideaal.

Het muzikaal esthetisch gevolg is dat elke modulatie in een andere toonaard een eigen inkleuring krijgt, terwijl toch geen enkele toonaard onbeluisterbaar dissonant zal klinken. Dat was wellicht wat Bach wilde aantonen en bereiken in zijn 'Das Wohltemperirte Clavier'